سلسلة

الأوائل

فى

الجبر

للصف الثالث الإعدادى

إعداد م / وليد رشدى

هدية مجانية



الوحدة الأولى

١ حل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الأولى

٢ حل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الثانية

٣ القانون العام لحل معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد

٤ حل معادلة الدرجة الثانيةفى متغير واحد بيانيا



حل معادلتين فى متغيرين

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا :

❶ س + ٤ = ٣ ، ص – ١ = ٥

❷ س = ٣ ، ص – س = ٢

❶ ∵ س = ٣ – ٤ = –١ ∴ ص = ٥ + ١ = ٦ م.ح = { (–١ ، ٦) }

❷ ∵ س = ٣ ∴ ص – ٣ = ٢ ∴ ص = ٢ + ٣ = ٥

∴ ص = ٥ م.ح = {(٣ ، ٥)}

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا :

❶ س + ٢ = ٠ ، ص + ٣س = –٥

❷ س + ص = ٨ ، س = ص

الحل

❶ ∵ س + ٢ = ٠ س = –٢

ص + ٣س = –٥ ص + ٣ (–٢) = –٥ ص – ٦ = –٥

ص = ٦ – ٥ ص = ١ م.ح = {(–٢ ، ١)}

❷ ص + ص = ٨ ٢ص = ٨ ص = ٤

س = ص س = ٤ م.ح = {(٤ ، ٤)}

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا : ٢س + ص = ١٠ ، ص = ٣س

الحل

∵ ٢ س + ٣س = ١٠ ∴ ٥س = ١٠ ∴ س = ٢

∴ ص = ٣ (٢) = ٦

م.ح = {(٢ ، ٦)}

مثال [٤]

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا : ٢س – ص – ٣ = ٠ ، س – ص – ١ = ٠

نوجد ص بدلالة س من المعادلة (٢) ص = س – ١

نعوض عن قيمة ص فى المعادلة الأولى ٢س – (س – ١) – ٣ = ٠

٢س – س + ١ – ٣ = ٠ س = ٢ نعوض فى المعادلة (١) عن قيمة س = ٢

ص = ٢ – ١ ص = ١

الحل المشترك للمعادلتين س = ٢ ، ص = ١ م.ح = { (٢،١) }

مثال [٤]

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا : ٢س – ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحل من المعادلة (١) ص = ٢س – ٣ بالتعويض من (٣) فى المعادلة (٢) عن ص

س + ٢ (٢س – ٣) = ٤

س + ٤س – ٦ = ٤ ٥س = ١٠ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ص = ٢س – ٣ = ٢ (٢) – ٣ = ٤ – ٣ = ١

الحل المشترك للمعادلتين س = ٢ ، ص = ١ م.ح = { (٢،١) }

مثال [٥]

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا : ٣س – ٢ص = ٤ ، ٢س + ص = ١٣

الحل ص = ١٣–٢س بالتعويض من (٣) فى (١) ٣س – ٢(١٣–٢س) = ٤

٣س–٢٦ + ٤س = ٤ ٧س – ٢٦ = ٤ ٧س = ٢٦ + ٤

٧س = ٣٠ س = $\frac{٣٠}{٧}$

بالتعويض عن قيمة س فى (٣) ص = ١٣ – ٢ $\left(\frac{٣٠}{٧}\right)$ = $\frac{٧ \times ١٣- ٦٠}{٧}$

∴ ص = $\frac{٩١- ٦٠}{٧}$ = $\frac{٣١}{٧}$ م.ح = { ($\frac{٣٠}{٧}$ ، $\frac{٣١}{٧}$) }

مثال (٦)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا بالحذف: س + ص = ٥ ، س – ص = ١

الحل

س + ص = ٥

س – ص = ١

٢س = ٦

س = ٣

٣ + ص = ٥

ص = ٥ – ٣ = ٢

ص = ٢

مجموعة الحل = {(٣ ، ٢)}

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا بالحذف: س + ٢ص = ٥ ، س – ٢ص = ١

الحل

س + ٢ص = ٥

س – ٢ص = ١

٢س = ٦

س = ٣

٣ + ٢ص = ٥

٢ص = ٥ – ٣ = ٢

ص = ١

مجموعة الحل = {(٣ ، ١)}

مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا بالحذف: ٢س + ص = ٣ ، ٢س + ٣ص = ٥

الحل

٢س + ص = ٣

٢س + ٣ص = ٥

– ٢ص = – ٢

ص = ١

٢س + ١ = ٣

٢س = ٣ – ١ = ٢

١ = ١

مجموعة الحل = {(١ ، ١)}

مثال (٩)

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا بالحذف: ٢س + ٥ص = ٩ ، ٣س – ص = ٥

الحل

٢س + ٥ ص = ٩

١٥س – ٥ص = ٢٥

١٧س = ٣٤

س = ٢

٢ × ٢ + ٢ص = ٩

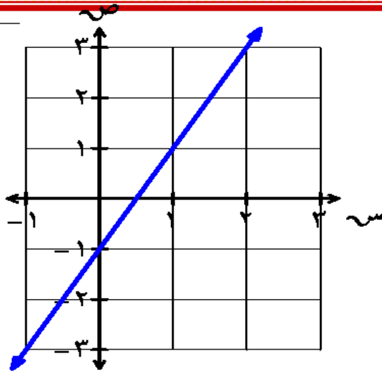
٢ص = ٩ – ٤ = ٥

∴ ص = $\frac{٥}{٢}$ ∴ مجموعة الحل = {(٢ ، $\frac{٥}{٢}$)}

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

✍ مثال [١٠]

أوجد مجموعة حل المعادلة بيانيا ٢س – ص = ١



عند س = صفر — ص = ١

ص = –١ — (٠ ، –١)

عند س = ١ — ٢ – ص = ١

– ص = ١ – ٢ — – ص = –١ — ص = ١

(١ ، ١) — م.ح = عدد لا نهائى من الحلول

✍ مثال [١١]

أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا ص = ٥س – ٣ ، س + ٣ص = ٧

عند س = صفر — ص = ٠ – ٣

ص = –٣ — (٠ ، –٣)

عند س = ١ — ص = ٥ × ١ – ٢ = ٥ – ٣ = ٢

(١ ، ٢)

عند س = ١ — ١ + ٣ص = ٧

٣ص = ٦ — ص = ٢ — (١ ، ٢)

عند س = ٧ ∴ ص = ٠ — م.ح = {(١ ، ٢)}

✍ مثال [١٢]

أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا ٢س + ص = ٠ ، س + ٢ص = ٣

٢س + ص = ٠ — عند س = صفر ∴ ٠ + ص = ٠ — ص = ٠

(٠ ، ٠)

، س + ٢ص = ٣ — عند س = ١ — ١ + ٢ص = ٣

٢ص = ٣ – ١ = ٢ — ∴ ص = ١ — (١ ، ١)

عند س = ٣ — ٣ + ٢ص = ٣ — ٢ص = ٣ – ٣ = ٠

ص = ٠ — (٣ ، ٠) — م.ح = {(–١ ، ٢)}

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

مثال [١٣]

أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا ص = ٣ س − ١ ، س − ص + ١ = ٠

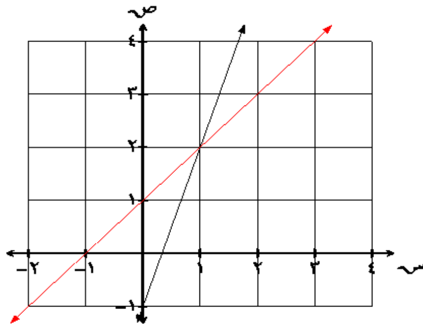
ص = ٣ س − ١

عند س = ٠

ص = ٣ (٠) − ١ = − ١ (٠ ، − ١)

عند س = ١ ص = ٣ (١) − ١ = ٣ − ١ = ٢

(١ ، ٢)



س − ص + ١ = ٠

عند س = صفر ٠ − ص + ١ = ٠

− ص = − ١ ص = ١ (٠ ، ١)

عند س = ١ ١ − ص + ١ = ٠

٢ − ص = ٠ − ص = − ٢

ص = ٢ م. ح = { (١ ، ٢) }

مثال [١٤]

أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا ٣ س + ص = ٣ ، ٢ ص + ٦ س = ١٢

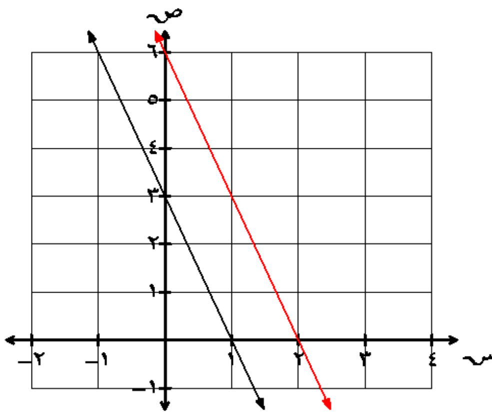
٣ س + ص = ٣ ، ٢ ص + ٦ س = ٦

عند س = ٠ ٠ + ص = ٣ ص = ٣

(٠ ، ٣)

عند س = ١ ٣ + ص = ٣ ص = ٠

(١ ، ٠)



٢ ص + ٦ س = ١٢

عند س = ٠ ٢ ص + ٠ = ١٢ ص = ٦

(٠ ، ٦)

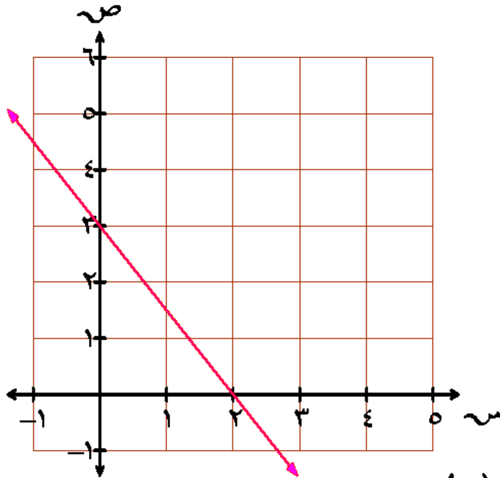
عند س = ١ ٢ ص + ٦ (١) = ١٢

٢ ص + ٦ = ١٢ ٢ ص = ١٢ − ٦

٢ ص = ٦ ص = ٣ (١ ، ٣) م. ح = ∅

مثال [١٥]

أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا ٣س + ٢ص = ٦ ، ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س



٣س + ٢ص = ٦

٣ (٠) + ٢ص = ٦ ٠ + ٢ص = ٦

ص = ٣ (٠ ، ٣)

عند س = ٢ ٦ + ٢ص = ٦

٢ص = ٦ − ٦ ٢ص = ٤

ص = ٢ (٢ ، ٠)

ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س

عند س = صفر ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ (٠)

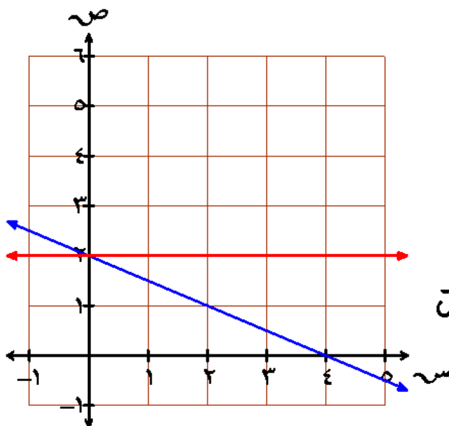
ص = ٣ (٠ ، ٣)

عند س = ٢ ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ (٢)

ص = ٣ − ٣ = ٠ (٢ ، ٠) م.ح = عدد لا نهائى من الحلول

مثال [١٦]

أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا س + ٢ص = ٤ ، ص − ٢ = ٠



عند س = صفر ٢ص = ٤

ص = ٢ (٠ ، ٢)

عند ص = صفر س + ٢(٠) = ٤

س = ٤ (٤ ، ٠)

ص − ٢ = ٠ ص = ٢ وهى معادلة خط مستقيم يوازى محور السينات

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

م.ح = {(٠ ، ٢)}



بحث نوع الخطين دون رسمهما

إذا كان : $ا س + ب ص = جـ$ ، $هـ س + و ص = ن$

❶ $\frac{ا}{هـ} = \frac{ب}{و} = \frac{جـ}{ن}$ **كان المستقيمان متطابقان** **عدد الحلول = عدد لا نهائي من الحلول**

م . ح = {(س ، ص) ، ا س + ب ص = جـ}

❷ $\frac{ا}{هـ} = \frac{ب}{و} \neq \frac{جـ}{ن}$ **كان المستقيمان متوازيان** **عدد الحلول = صفر**

م . ح = $\varnothing$

❸ $\frac{ا}{هـ} \neq \frac{ب}{و}$ **كان المستقيمان متقاطعان** **عدد الحلول = حل وحيد**

م . ح = {(س ، ص)} **بطريقة الحذف أو التعويض**

مثال (١)

بين نوع الخطين التاليين $٢س + ٣ ص = ١$ ، $٤ س + ٦ ص = ٢$

نوجد أولا $\frac{ا}{هـ}$ ، $\frac{ب}{و}$ ، $\frac{جـ}{ن}$ ∴ $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{ا}{هـ} = \frac{ب}{و} = \frac{جـ}{ن}$

∴ **المستقيمان متطابقان**

مثال (٢)

بين نوع الخطين التاليين $٢س + ٢ ص = ٥$ ، $٣ س + ٣ ص = ٢$

نوجد أولا $\frac{ا}{هـ}$ ، $\frac{ب}{و}$ ، $\frac{جـ}{ن}$ ∴ $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٢}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} \neq \frac{٥}{٢}$ ∴ $\frac{ا}{هـ} = \frac{ب}{و} \neq \frac{جـ}{ن}$

∴ **المستقيمان متوازيان**

مثال [٣]

بين نوع الخطين التاليين س + ٢ ص = ٦ ، ٣ س + ٤ ص = ١

نوجد أولا $\frac{أ}{هـ}$ ، $\frac{ب}{و}$ ، $\frac{جـ}{ن}$ ∴ $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٦}{١}$

∴ $\frac{١}{٣} \neq \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{أ}{هـ} \neq \frac{ب}{و}$ ∴ **المستقيمان متقاطعان**

مثال [٤]

احسب قيمة ك التى تجعل المستقيمان س + ٣ ص + ١ = ٠ ، ٣ س + ك ص = ٧ **متوازيان**

الحل

نكتب المعادلتين بنفس الشكل س + ٣ ص + ١ = ٠ ، ٣ س + ك ص – ٧ = ٠

∵ **المستقيمان متوازيان** ∴ $\frac{أ}{هـ} = \frac{ب}{و} \neq \frac{جـ}{ن}$

∴ $\frac{١}{٣} = \frac{٣}{ك}$ ∴ ك = ٣ × ٣ = ٩ ∴ ك = ٩

مثال [٥]

احسب قيمة م ، ك التى تجعل المستقيمان ٥س + م ص =٤ ، ٣ س + ٦ص = ك **متطابقان**

الحل

نكتب المعادلتين بنفس الشكل

٥س + م ص =٤ ، ٣ س + ٦ص = ك **متطابقان**

∵ **المستقيمان متطابقان** ∴ $\frac{أ}{هـ} = \frac{ب}{و} = \frac{جـ}{ن}$ $\frac{٥}{٣} = \frac{م}{٦} = \frac{٤}{ك}$

$\frac{٥}{٣} = \frac{م}{٦}$ ∴ ٣ م = ٣٠ ∴ م = $\frac{٣٠}{٣}$ ∴ م = ١٠

∴ $\frac{٥}{٣} = \frac{٤}{ك}$ ∴ ٥ك = ١٢ ∴ ك = $\frac{١٢}{٥}$



تمارين (١) على حل معادلتين فى متغيرين جبريا وبيانيا

(١) أكمل ما يأتى :

❶ إذا كان : $ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing$ فان مجموعة حل المعادلتين اللتين يمثلهما المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ هى ....

❷ معادلتان يمثلهما المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ ولهما عدد لا نهائى من الحلول فان المستقيمين يكونان ....

❸ مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٠ ، ص – ٥ = ٠ فى ح × ح هى ....

❹ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٣ص = ٤ ، س + م ص = ٧ متوازيان فان : م = ...

❺ المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س = ٣ ، ص = ٥ يتقاطعان فى النقطة ....

❻ نقطة تقاطع المستقيمين : س + ٧ = ٠ ، ص – ١ = ٠ تقع فى الربع ....

❼ مجموعة حل المعادلتين : ٤س + ص = ٦ ، ٢ص = ١٢ – ٨ س فى ح × ح هى ....

❽ الحل الوحيد للمعادلتين : ص = ٢ ، ٢س = ص فى ح × ح هى ....

❾ مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٠ ، ص = ٤ فى ح × ح هى ....

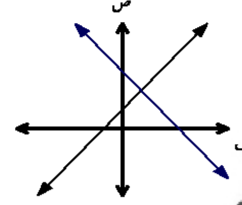
❿ مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٦ ، ص = س فى ح × ح هى ....

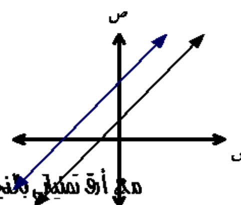
⓫ إذا كان للمعادلتين : س + ٢ص = ١ ، س + م ص = ٢ حل وحيد فان م لا يمكن أن تساوى ....

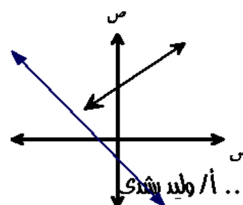
⓬ مجموعة حل المعادلتين : س + ٣ص = ٤ ، ٣ص = ١ – س فى ح × ح هى ....

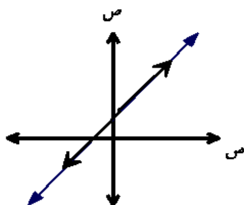
(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ أى من الأشكال التالية يمثل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين ليس لهما حل مشترك ؟

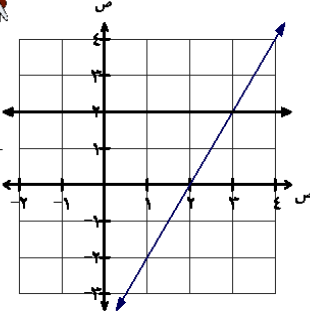












❷ فى الشكل المقابل :

مجموعة حل المعادلتين اللتين يمثلهما المستقيمان ل ١ ، ل ٢ هي ....

(١) {(٢ ، ٢)}　(٢) {(٣ ، ٢)}

(٣) {(٢ ، ٠)}　(٤) {(٢ ، ٣)}

❸ نقطة تقاطع المستقيمين : ص = س ، س + ٢ = ٠ هي ....

(١) {(٢ ، ٢)}　(٢) {(٢ ، –٢)}　(٣) (–٢ ، ٢)　(٤) (–٢ ، –٢)

❹ المستقيمان : ص = س –٣ ، ص = س + ٣ يكونان ....

(١) متوازيان　(٢) متعامدان　(٣) منطبقان　(٤) متقاطعان

❺ المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س – ص = ٢ ، ٢س – ٢ص = ٤ يكونان ....

(١) متقاطعين　(٢) منطبقين　(٣) متوازين　(٤) متعامدين

❻ مجموعة حل المعادلتين : س – ٢ = ٠ ، ص + ٥ = ٠ في ح × ح هي

(١) {(٢ ، ٥)}　(٢) {(٢ ، ٤)}　(٣) {(١ ، ٣)}　(٤) {(٣ ، ١)}

❼ المستقيمان : ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س – ٣ص = ٠ يتقطعان في ....

(١) نقطة الأصل　(٢) الربع الأول　(٣) الربع الثانى　(٤) الربع الرابع

❽ عدد حلول المعادلتين : س – $\frac{١}{٢}$ ص = ٤ ، ٢س – ص = ٢ في ح^{٢} هو ....

(١) حل وحيد　(٢) حلان　(٣) عدد لانهائي　(٤) صفر

❾ إذا كان للمعادلتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + م ص = ٢١ عدد لا نهائي من الحلول فان : ك = ...

(١) ٤　(٢) ٧　(٣) ١٢　(٤) ٢١

❿ إذا كان : (س + ص ، –٣) = (٥ ، س – ص) فان : (ص ، س) = ...

(١) (–٣ ، ٥)　(٢) (٥ ، –٣)　(٣) (١ ، ٤)　(٤) (٤ ، ١)

[٣] ما عدد حلول كل ازواج من المعادلات الآتية :

❶ ٧س + ٤ص = ٦ ، ٥س –٢ص = ١٤

❷ ٤س + ٢ص = ١٠ ، ص = –٢س –٥

❸ ٩س + ٦ص = ٢٤ ، ٣س + ٢ص = ٨



[٤] أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية بيانيا وجبريا :

١) س + ص = ٤ ، ٢س − ص = ٢
٢) س + ص = ٣ ، س − ص = ١
٣) س = ٣ ، ٣س − ٥ص = ١
٤) ٣ص = ٦ ، س + ٦ص = ١٢
٥) ص = ٢س − ١ ، ٢ص + س = ٨
٦) س = ١ + ص ، س + ٢ص + ٥ = ٠
٧) س − ٢ص = ٧ ، ٢س + ص = ٤
٨) ٣ص − س = ٣ ، ص − ٣س + ٧ = ٠
٩) س + ٢ص = ١٢ ، ٣س − ص = ١
١٠) س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ص = ٥
١١) س + ص = ٥ ، ص − س = ١
١٢) ٢س + ص = ٣ ، س − ٢ص = ٤
١٣) ٢س + ٣ص = ١٢ ، ٣س − ص = ٧
١٤) س − ٢ص = ٢ ، ٢س − ص = ١
١٥) س + ٧ص = ٢٢ ، ٤س + ٣ص = ١٣
١٦) س + ص = ٧ ، ص + ٢س = ١٠

[٥] أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية جبريا :

١) ص = ٢س − ١ ، س + ٢ص = ٨
٢) س + ص = ٥ ، ص = ٨ − ٢س
٣) س + ص = ١ ، ص = ٢س + ٤
٤) س + ٢ص − ١ = ٠ ، ص + ٢س = ٨
٥) ٢س + ص = ٣ ، ٣س = ٥ − ص
٦) س + ص = ٦ ، ٢س + ص − ٨ = ٠
٧) ٢س − ص = ٣ ، س + ٣ص = ٥
٨) س + ٣ص = ١١ ، ص − ٣س + ١٣ = ٠
٩) س + ٢ص = ٧ ، ٣س + ص = ١١
١٠) ٣س = ٢ص ، س − ص + ١ = ٠
١١) س − ٢ص = ٧ ، ٢س + ٣ص = ٠
١٢) س − ص = ٥ ، ٢س + ٣ص = ٠
١٣) ٥ص = ٢س + ١ ، س − ٢ص = ١
١٤) ٢س + ص = ٧ ، س − ٢ص + ٤ = ٠
١٥) س − ص = ٦ ، س + ص = ٠
١٦) ٣س + ص = ٨ ، ٧س − ص = ١٤
١٧) ٢س + ص = ٤ ، س − ٢ص + ٣ = ٠
١٨) ٢س − ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤
١٩) ٣س + ص = ١٥ ، س − (٣/٢)ص = ٢

[٦] أوجد قيمة أ ، ب في كل مما يأتى :

١) أ س + ب ص − ٥ = ٠ ، ٣أ س + ب ص = ١٧ علما بأن : (٣ ، −١) حل المعادلتين .
٢) أ س + ب ص + ٥ = ٠ ، ٢أ س + ب ص − ١ = ٠ علما بأن : (١ ، ٢) حل المعادلتين .



[٨] إذا كانت : { (– ٣ ، ٥) ، (٥ ، ١) } ⊂ $\overleftrightarrow{أب}$ ، معادلة $\overleftrightarrow{جـ ء}$ هي : ص = س – ١

أوجد : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ ء}$

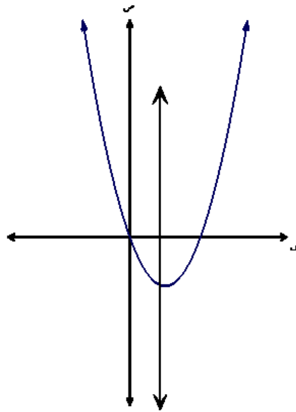
[٩] إذا كان : (– ء ، ٢جـ) ، (٣ء – ٢ ، ٣ – جـ) حلين للمعادلة س + ص = ٤

فأوجد قيمة كل من : جـ ، ء

[١٠] إذا كان : $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ١٠$ ، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٣$ فأوجد قيمة كل من : س ، ص

[١١] إذا كانت $س^{-١} - ص^{-١} = ١$ ، $س^{-١} + ص^{-١} = ٥$ فأوجد قيمة كلا من : س ، ص

[١٢] في الشكل المقابل :



د(س) = أ $س^٢$ + ب س + جـ (حيث أ ≠ صفر)

فإذا كان معادلة محور التماثل ل هي س = ١ ،

أن القيمة الصغرى للدالة د هي : – ٢

أوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

[١٣] إذا كانت : د(س) = أ $س^٢$ + ب وكانت د(١) = ٥ ، د(٢) = ١١

فأوجد قيمتي : أ ، ب

[١٤] إذا كانت : د(س) = ٢$س^٢$ + ب س + جـ وكانت : د(س) = ٠

عندما س ∈ { ٠ ، ٣ } فأوجد قيمة كل من : ب ، جـ

[١٤] إذا كان منحنى الدالة د(س) = $س^٢$ + ٥س + جـ يقطع محور السينات عند س = ٢

، عند س = ء فأوجد قيمتي جـ ، ء ، حيث ء عدد سالب

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



حل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الثانية

مثال ١

أوجد مجموعة حل المعادلتين جبريا بالتعويض

❶ س = ٣ ، س ص = ٦

❷ س = ٣ ، س^٢ + ص^٢ = ١٣

❸ س = ص ، س^٢ + ص^٢ = ٥٠

❶ س = ٣   ٣ص = ٦   ص = ٢   م.ح = {(٣ ، ٢)}

❷ س = ٣   ∴ ٩ + ص^٢ = ١٣   ∴ ص^٢ = ١٣ – ٩   ∴ ص^٢ = ٤

∴ ص = ± ٢   ∴ م.ح = {(٣ ، –٢) (٣ ، ٢)}

❸ ٢ص^٢ = ٥٠   ص^٢ = ٢٥   ص = ± ٥

م.ح = {(–٥ ، –٥) (٥ ، ٥)}

مثال ٥

أوجد مجموعة حل المعادلتين

❶ س = –٢ص ، س^٢ + ص^٢ = ٤٥

❷ س = ص + ١ ، س^٢ + ص^٢ = ١٣

❶ س = –٢ص   ٤ص^٢ + ص^٢ = ٤٥   ٥ص^٢ = ٤٥

ص^٢ = ٩   ص = ± ٣   ص = –٢ (± ٣) = ∓٦

م.ح = {(–٦ ، ٣) (٦ ، –٣)}

❷ س = ص + ١   ∴ (ص + ١)^٢ + ص^٢ = ١٣   ∴ ص^٢ + ٢ص + ١ + ص^٢ = ١٣

∴ ٢ص^٢ + ٢ص – ١٢ = ٠   ∴ ص^٢ + ص – ٦ = ٠   ∴ (ص + ٣)(ص – ٢) = ٠

∴ ص = – ٣ ، ص = ٢   ∴ س = –٣ + ١ = – ٢   ∴ س = ٢ + ١ = ٣

م.ح = {(٣ ، ٢) (–٢ ، – ٣)}

مثال ٧

أوجد مجموعة حل المعادلتين س = ص + ٢ ، س ص = ٦٣

∴ س = ص + ٢   ∴ (ص + ٢) ص = ٦٣   ∴ ص^٢ + ٢ص – ٦٣ = ٠

∴ (ص + ٩)(ص – ٧) = ٠   ∴ ص = – ٩ ، ص = ٧

∴ س = – ٩ + ٢ = – ٧   س = ٧ + ٢ = ٩

م.ح = {(٩ ، ٧) (–٧ ، – ٩)}

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



تمارين على حل معادلتين فى متغيرين

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : $س^{2}$ – $ص^{2}$ = ١٢ ، س + ص = ٤ فإن س – ص = ...

(١) ١٢   (٢) ٣   (٣) ٣٢   (٤) ٤٨

٢ مجموعة حل المعادلتين : س – ص = ٠ ، س ص = ٩ فى ح × ح هى ....

(١) {(٠ ، ٠)}   (٢) {(–٣ ، ٣)}   (٣) {(٣ ، ٣)}   (٤) {(–٣ ، –٣) ، (٣ ، ٣)}

٣ مجموعة حل المعادلتين : س = ١ ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٢ فى ح × ح هى ....

(١) {(١ ، ١)}   (٢) {(١ ، –١)}   (٣) ∅   (٤) {(١ ، –١) ، (١ ، ١)}

٤ مجموعة حل المعادلتين : ص = – ٢ ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٢ فى ح × ح هى ....

(١) {(٢ ، ٢)}   (٢) {(–٢ ، –٢)}   (٣) ∅   (٤) {(–٢ ، –٢) ، (٢ ، ٢)}

٥ الزوج المرتب الذى يحقق كلا المعادلتين : س ص = ٢ ، س – ص = ١ هو ....

(١) (١ ، ١)   (٢) (١ ، ٢)   (٣) (٢ ، ١)   (٤) (٠,٥ ، ١)

٦ أحد حلول المعادلتين : س – ص = ٢ ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٢٠ هو ....

(١) (–٤ ، ٢)   (٢) (٢ ، –٤)   (٣) (٣ ، ١)   (٤) (٤ ، ٢)

٧ إذا كان : ص = ١ – س ، $(س + ص)^{2}$ + ص = ٥ فإن ص = ...

(١) ٥   (٢) ٣   (٣) –٤   (٤) ٤

٨ إذا كان : $س^{2}$ + س ص = ١٥ ، س + ص = ٥ فإن : س = ...

(١) ٣   (٢) ٤   (٣) ٥   (٤) ٦

[٢] حل معادلتين فى متغيرين أحدهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

١ س = ١ ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٥

٢ ص = ٣ ، س ص = ٦

٣ س = – ص ، س ص = ٤

٤ س = ص ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٢

٥ ص = – س ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٥٠

٦ ص = ٢س ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ٥

٧ س – ٣ص = ٠ ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ = ١٠

٨ ص = ٣س ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ + س ص = ١٣

٩ س – ص = ٠ ، $س^{2}$ + ٢$ص^{2}$ = ٧٥

١٠ ص + ٢ص = ٠ ، ٦$س^{2}$ – $ص^{2}$ = ٧٢

١١ س + ٣ = ٠ ، ٢$س^{2}$ – $ص^{2}$ = ١٤

١٢ ص – ٢س = ٠ ، س ص = ٨

١٣ س = ٠ ، $س^{2}$ + $ص^{2}$ + ٤س + ٣ص = ١٠

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

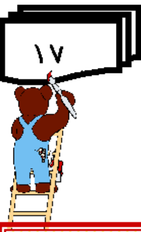


[٣] أوجد فى ع × ع مجموعة حل كل زوج من المعادلتين الأتيتين :

1. س + ص = ٥ ، س^{2} + ص^{2} = ١٣
2. س + ص = ٣ ، س ص − ٢ = ٠
3. س + ص = ٧ ، س^{2} + ص^{2} = ٢٥
4. ص − س = ١ ، س^{2} + ص^{2} = ١٣
5. س − ص = ٣ ، س ص − ص^{2} = ٦
6. س − ص = ١ ، س^{2} − ص^{2} = ٧
7. س + ص = ٢ ، س ص + ص^{2} = ٤
8. س + ص = ١ ، س ص + ١٢ = ٠
9. س − ص − ٢ = ٠ ، س^{2} + ص^{2} = ٢٥
10. س − ص = ٣ ، س^{2} + ص^{2} = ١٧
11. س + ص = ٧ ، س^{2} − ص^{2} = ٧
12. ص = س − ١ ، ص^{2} + س = ٧
13. س = ٥ − ص ، س^{2} − ص^{2} = ٥٥
14. ص − س = ٤ ، س ص = ٥
15. ٢ص = ٣س ، س^{2} + ص^{2} = ١٣
16. س − ٢ص = ٨ ، ص^{2} = س
17. ص = ٢س + ١ ، ٤س^{2} + ص^{2} = ١٣
18. ٢س + ص = ١٠ ، س^{2} + ص^{2} = ٢٥

[٤] أوجد فى ع × ع مجموعة حل كل زوج من المعادلتين الأتيتين :

1. ص − س = ٢ ، س^{2} + س ص − ٤ = ٠
2. س − ٢ص − ١ = ٠ ، س^{2} − س ص = ٠
3. س − ٣ص = ١ ، س^{2} − ٢س ص − ص^{2} = ٠
4. س + ٢ص = ٤ ، س^{2} + س ص + ص^{2} = ٧
5. س − ص = ١ ، س^{2} + س ص + ص^{2} = ٧
6. ص − س = ٣ ، س^{2} + ص^{2} − س ص = ١٣
7. س + ٣ص = ١ ، س − ٣س ص = ٢٥
8. س − ٥ص = ٣ ، س^{2} − ٢٥ص^{2} = ٢١
9. ٢س − ٥ص = ٤ ، ٢س^{2} − ٥س ص = ١٢
10. س − ص = ٣ ، س^{2} − ٣س ص + ص^{2} = ٧
11. س − ص = ٢ ، (س − ٢)^{2} + ص^{2} = ٣٢
12. ص = ١ − س ، (س + ص)^{2} + ص = ٥
13. س + ٣ص = ٢ ، س^{2} + ٦س ص + ٩ص^{2} + ص = ٥
14. س + ص = ٢ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$ = ٢ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠
15. س ص = ٦ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$ = $\frac{٥}{٦}$



تطبيقات على حل معادلتين

مثال [١]

زاويتان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى . أوجد قياس كل زاوية .

نفرض أن الزاويتان س° > ص°

∵ الزاويتان متكاملتان ∴ س + ص = ١٨٠° .... ❶

∵ ضعف قياس أكبرهما يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى ∴ ٢ س = ٧ ص

∴ ٢ س – ٧ ص = ٠ .... ❷ بضرب المعادلة ❶ × ٧ و الجمع

٧ س + ٧ ص = ١٢٦٠° ∴ ٩ س = ١٢٦٠° ∴ س = ١٤٠°

∴ ص = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

مثال [٢]

زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما .

نفرض أن الزاويتان س° > ص° ∴ س + ص = ٩٠° .... ❶

∵ س – ص = ٥٠° .... ❷ بحل المعادلتين

∴ ٢ س = ١٤٠° س = ٧٠° ص = ٢٠°

مثال [٣]

عدد مكون من رقمين ورقم آحادة ضعف رقم عشراته ، وإذا عكس وضع الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٣٦ أوجد العدد الأصلي

نفرض أن الآحاد س ، العشرات ص الأصلى س + ١٠ ص الناتج ص + ١٠ س

∵ رقم عشراته ضعف رقم آحاده ∴ س = ٢ ص .... ❶

عند عكس الرقمين ∴ الناتج يزيد عن الأصلى بمقدار = ٣٦ ∴ الناتج – الأصلى = ٣٦

(ص + ١٠ س) – (س + ١٠ ص) = ٣٦

٩ س – ٩ ص = ٣٦ ∴ س – ص = ٤ .... ❷

∴ ٢ ص – ص = ٤ ∴ ص = ٤ ∴ س = ٨ ∴ العدد الأصلى هو ٤٨

مثال [٤]

عدد مكون من رقمين مجموع رقميهما = ١١ ، وإذا عكس وضع الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلي بمقدار ٢٧ أوجد العدد الأصلي

نفرض أن الآحاد س ، العشرات ص الأصلى س + ١٠ ص الناتج ص + ١٠ س

∴ س + ص = ١١ ....❶

عند عكس الرقمين ∴ الناتج يزيد عن الأصلى بمقدار = ٢٧ ∴ الناتج – الأصلى = ٢٧

(ص + ١٠ س) – (س + ١٠ ص) = ٢٧

٩ س – ٩ ص = ٢٧ ∴ س – ص = ٣ ....❷

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

∴ ٢ س = ١٤ ∴ س = ٧ ∴ ص = ٤

العدد الأصلى هو ٤٧

مثال [٥]

إذا كان مجموع عمرى أحمد وأسامة الآن ٤٣ سنة ، بعد ٥ سنوات يكون الفرق بين عمريهما ٣ سنوات أوجد عمر كل منهما بعد سنوات .

نفرض أن عمر أحمد هو س ، عمر أسامة ص

	الآن	بعد ٥ سنوات	بعد ٧سنوات
عمر أحمد	س	س +٥	س + ٧
عمر أسامة	ص	ص +٥	ص + ٧

س + ص = ٤٣ ....❶

(س + ٥) – (ص + ٥) = ٣ ∴ س + ٥ – ص – ٥ = ٣

∴ س – ص = ٣ ....❷ بحل المعادلتين بالحذف

∴ ٢س = ٤٦ ∴ س = ٢٣ ∴ ص = ٢٠

عمر أحمد بعد ٧سنوات = س + ٧ = ٢٣ + ٧ = ٣٠ سنة

عمر أسامة بعد ٧سنوات = ص + ٧ = ٢٠ + ٧ = ٢٧ سنة

مثال [٦]

مستطيل محيطه ٣٢ سم ، وإذا نقص طوله ١ سم ، وزاد عرضه ٣ سم صار مربعا أوجد مساحة المربع .

نفرض أن : العرض س ، الطول ص

∴ س + ص = المحيط / ٢   ∴ س + ص = ١٦ .... (١)

∴ عندما يصير المستطيل مربع   فان الطول = العرض

∴ ص − ١ = س + ٣   ∴ س − ص = − ٤ .... (٢)

بحل المعادلتين بالجمع ∴ ٢ س = ١٢   ∴ س = ٦   ∴ ص = ١٠

∴ طول ضلع المربع = ص − ١ = ١٠ − ١ = ٩ سم

∴ مساحة المربع = طول الضلع × نفسه = ٩ × ٩ = ٨١ سم^2

مثال [٧]

عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته ، فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوي نصف العدد الأصلي فما العدد ؟

نفرض أن الآحاد س ، العشرات ص   الأصلي س + ١٠ ص   الناتج ص + ١٠ س

∵ رقم عشراته ضعف رقم آحاده   ∴ س = ٢ ص .... (١)

∵ حاصل ضرب الرقمين يساوي نصف العدد الأصلي

∴ س ص = ١/٢ (س + ١٠ ص) .... (٢)   بالتعويض من (١) في (٢)

∴ ٢ ص × ص = ١/٢ (٢ ص + ١٠ ص) = ص + ٥ ص = ٦ ص

∴ ٢ ص^2 = ٦ ص   ∴ ٢ ص^2 − ٦ ص = ٠   ∴ ٢ ص (ص − ٣) = ٠

∴ ص = ٠ مرفوض   ∴ ص − ٣ = ٠   ∴ ص = ٣

∴ س = ٢ ص = ٦   ∴ العدد ٣٦

مثال[٨]

مستطيل محيطة ٨٤ سم ، وطول قطرة ٣٠ سم أوجد طولا بعديه

نفرض أن : العرض س ، الطول ص

∴ س + ص = $\frac{\text{المحيط}}{2}$ ∴ س + ص = ٤٢

∴ ص = ٤٢ – س .... ❶

∴ قَ^{2} = س^2 + ص^2 = $(30)^2$ ∴ س^2 + ص^2 = ٩٠٠ ....❷

∴ س^2 + $(42 - س)^2$ = ٩٠٠

∴ س^2 + ١٧٦٤ – ٨٤ س + س^2 – ٩٠٠ = ٠

∴ ٢ س^2 – ٨٤ س – ٧٦٤ = ٠ ∴ س^2 – ٤٢س – ٣٨٢ = ٠

∴ (س – ١٨) (س + ٢٤) = ٠ ∴ س = ١٨ ، س = –٢٤ مرفوض

∴ العرض س = ١٨ ∴ الطول ص = ٢٤ – ١٨ = ٢٤

مثال[٩]

عدد مكون من رقمين مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربهما بمقدار ١٣ ،وإذا عكس وضع الرقمين كان العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ فما العدد الأصلى ؟

نفرض أن الآحاد س ، العشرات ص الأصلى س + ١٠ ص الناتج ص + ١٠ س

∵ س^2 + ص^2 – س ص = ١٣ ....❶

الناتج ينقص عن الأصلى بمقدار ٢٧ ∴ الأصلى – الناتج = ٢٧

∴ س + ١٠ ص – (ص + ١٠ س) = ٢٧ ∴ س + ١٠ ص – ص – ١٠ س = ٢٧

∴ ٩ ص – ٩ س = ٢٧ ∴ ص – س = ٣

∴ ص = ٣ – س ....❷ بالتعويض من ❷ فى ❶

س^2 + $(س + 3)^2$ – س (س + ٣) = ١٣

∴ س^2 + س^2 + ٦ س + ٩ – س^2 – ٣ س – ١٣ = ٠

∴ س^2 + ٣ س – ٤ = ٠ ∴(س + ٤) (س – ١) = ٠

∴ س = – ٤ مرفوض أو س = ١

∴ ص = ٣ + ١ = ٤ ∴ العدد الأصلى ٤١

✍ **مثال [١٠]**

معين الفرق بين طول قطريه ٤ سم ، ومحيطه ٤٠ سم أوجد طول كل من قطريه .

بفرض أن القطرين هما ٢ س ، ٢ ص ، س > ص

∴ ٢ س − ٢ ص = ٤ ∴ س − ص = ٢ س = (٢ + ص) .... ❶

∵ المحيط = ٤ ل = ٤٠ ∴ ل = ١٠

∴ س^2 + ص^2 = $(١٠)^2$ ∴ س^2 + ص^2 = ١٠٠ .... ❷

∴ $(٢ + ص)^2$ + ص^2 = ١٠٠ ∴ ٤ + ٤ ص + ص^2 + ص^2 − ١٠٠ = ٠

∴ ٢ ص^2 + ٤ ص − ٩٦ = ٠ ∴ ص^2 + ٢ ص − ٤٨ = ٠

∴ (ص + ٨) (ص − ٦) = ٠ ∴ ص = ٦

∴ س = ٢ + ٦ = ٨ ∴ القطر الأول = ١٢ سم ، القطر الثاني = ١٦ سم

✍ **مثال [١١]**

مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه = ٣٠ سم . أوجد طولي ضلعي القائمة .

بفرض أن طولا ضلعي القائمة س ، ص ، وتره ل

∵ المحيط = ٣٠ سم ∴ س + ص + ١٣ = ٣٠ ∴ س + ص = ١٧

∴ ص = ١٧ − س .... ❶

∴ من فيثاغورث ∴ س^2 + ص^2 = $(١٣)^2$ ∴ س^2 + ص^2 = ١٦٩ .... ❷

س^2 + $(١٧ − س)^2$ = ١٦٩ ∴ س^2 + ٢٨٩ − ٣٤ س + س^2 − ١٦٩ = ٠

∴ ٢ س^2 − ٣٤ س + ١٢٠ = ٠ ∴ س^2 − ١٧ س + ٦٠ = ٠

∴ (س − ٥) (س − ١٢) = ٠ ∴ س = ٥ ومنه ص = ١٢

أو س = ١٢ ومنها ص = ٥

∴ ضلعي القائمة هما : ١٢ سم ، ٥ سم

✍ **مثال [١٢]**

تتحرك نقطة على مستقيم : ٥ س – ٢ ص = ١ بحيث إحداثيها الصادى ضعف مربع إحداثيها السينى أوجد احداثيا هذه النقطة .

نفرض أن النقطة (س ، ص)

∵ ٥ س – ٢ ص = ١ ∴ ٢ ص = ٥ س – ١ ∴ ص = $\frac{\text{٥ س – ١}}{\text{٢}}$ .... ❶

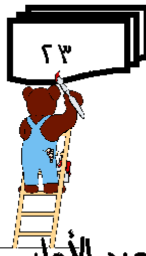
∵ ص = ٢ س^{٢} .... ❷ ∴ $\frac{\text{٥ س – ١}}{\text{٢}}$ = ٢ س^{٢}

∴ ٤ س^{٢} = ٥ س – ١ ∴ ٤ س^{٢} – ٥ س + ١ = ٠

∴ (٤ س – ١) (س – ١) = ٠ ∴ س = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ∴ ص = $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$

أو س = ١ ∴ ص = ٢

احداثيا النقطة المطلوبة : ($\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$) ، (١ ، ٢)



تمارين( ) على تطبيقات على حل المعادلات

١ عددان نسبيان نسبيهما مجموعهما ٦٣ والفرق بينهما ١٢ أوجد العددين

٢ عددان إذا أضيف ثلاثة أمثال العدد الأول إلى ضعف العدد الثانى كان الناتج ١٩ وإذا أضيف العدد الأول إلى ثلاثة أمثال العدد الثانى كان الناتج ١٦ فما العددان ؟

٣ عددان مجموعهما ١٢ وثلاثة أمثال أصغرهما يـزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار واحد .أوجد العددان

٤ عدد نسبى فى أبسط صورة إذا طرح ٣ من كل من بسطه ومقامه أصبح العدد النسبى مستوياً $\frac{٥}{٦}$ ، وإذا أضيف ٥ إلى كل من بسطه ومقامه أصبح مساوياً $\frac{١٣}{١٤}$ أوجد العدد النسبى

٥ عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١ وضعف رقم الآحاد يزيد عن ثلاثة أمثال رقم العشرات بمقدار ٢أوجد العدد

٦ عدد مكون من رقمين مجموعهما٥ وإذا تغير وضع الرقمين فإن العدد الـناتج ينقص عن العدد الأصلى بمقدار ٩ فما هو العدد الأصلى ؟

٧ منذ ٦ سنوات كان عمر رجل ستة أمثال عمر ابنه وبعد عشر سنوات يكون عمر الرجل ضعف عمر ابنه . فما عمر كل منهما الآن ؟

٨ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم ، فإذا كان ضعف طوله ينقص عن أربعة أمثال عرضه بمقدار ٢ سم ، أوجد طول وعرض المستطيل .

٩ مستطيل محيطه ٣٢ سم ، وإذا نقص طوله ١سم ، وإذا زاد عرضه ٣ سم ، صار مربعا أوجد مساحة المربع.

١٠ زاويتان متتامتان قياس إحداهما يزيد عن خمسة أمثال قياس الأخرى بمقدار ٣٠° أوجد قياس كل زاوية .

١١ مجموع عددين صحيحين هو ٧ ، حاصل جمع مربعيهما ٢٥ أوجد العددين .

١٢ عددان أحدهما معكوس جمعى للآخر ، ومجموع مربعيهما هو ٢ أوجد العددين .

١٣ عددان الفرق بينهما ٥ وحاصل ضربهما ٣٦ أوجد العددين .

١٤ مجموع عددين صحيحين هو ٩ ، والفرق بين مربعيهما ٢٧ أوجد العددين .

١٥ مستطيل محيطه ٢٤ سم ، ومساحته ٣٥سم٢ . أوجد بعديه

١٦ مستطيل طول قطره ٥ سم ، ومحيطه ١٤ سم ، أوجد بعديه

١٧ معين الفرق بين طولى قطريه ٢ سم ، ومحيطه ٢٠سم أوجد طول كل من قطريه .

١٨ مثلث قائم الزاوية طول وتره ٥ سم ، محيطه = ١٢سم . أوجد طولى ضلعى القائمة .

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



حل معادلة الدرجة الثانية باستخدام القانون العام

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ٤س + ٢ = ٠$ اعتبر $\sqrt{٢} = ١,٤$

الحل

$أ = ١$ ، $ب = -٤$ ، $جـ = ٢$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٨}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = ٢ \pm \sqrt{٢} = ٢ \pm ١,٤$$

$س = ٢ + ١,٤ = ٣,٤$ ، $س = ٢ - ١,٤ = ٠,٦$

مجموعة الحل = $\{٣,٤ ، ٠,٦\}$

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ٢س - ٢ = ٠$ اعتبر $\sqrt{٣} = ١,٧$

الحل

$أ = ١$ ، $ب = -٢$ ، $جـ = -٢$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤(١)(-٢)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٨}}{٢}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{١٢}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٣}}{٢}$$

$$= ١ \pm \sqrt{٣} = ١ \pm ١,٧$$

$س = ١ + ١,٧ = ٢,٧$ ، $س = ١ - ١,٧ = -٠,٧$

مجموعة الحل = $\{٢,٧ ، -٠,٧\}$

✍ مثال (٣)

اوجد مجموعة حل المعادلة ٢س٢ + ٢س − ٣ = ٠ **اعتبر** √٧ = ٢,٦٤

الحل

أ = ٢ ، ب = ٢ ، جـ = −٣

س = (−ب ± √(ب٢ − ٤ أ جـ)) / ٢أ = (−(٢) ± √((٢)٢ − ٤(٢)(−٣))) / (٢ × ٢) = (−٢ ± √(٤ + ٢٤)) / ٤

= (−٢ ± √٢٨) / ٤ = (−٢ ± ٢√٧) / ٤ = (−١ ± ٢.٦٤) / ٢

س = (−١ + ٢.٦٤) / ٢ = ١.٦٤ / ٢ = ٠,٨٢ س = (−١ − ٢.٦٤) / ٢ = −٣.٦٤ / ٢ = − ١,٨٢

مجموعة الحل = { ٠,٨٢ ، −١,٨٢ }

✍ مثال (٤)

اوجد مجموعة حل المعادلة س(س + ٥) + ٥ = ٠ **اعتبر** √٥ = ٢,٢

الحل

س٢ + ٥س + ٥ = ٠

أ = ١ ، ب = ٥ ، جـ = ٥

س = (−ب ± √(ب٢ − ٤ أ جـ)) / ٢أ = (−(٥) ± √((٥)٢ − ٤(١)(٥))) / (٢ × ١) = (−٥ ± √(٢٥ − ٢٠)) / ٢

= (−٥ ± √٥) / ٢ = (−٥ ± ٢.٢) / ٢

س = (−٥ + ٢.٢) / ٢ = −٧.٢ / ٢ = −٣,٦ س = (−٥ − ٢.٢) / ٢ = −٢.٨ / ٢ = −١,٤

مجموعة الحل = { −١,٤ ، −٣,٦ }

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة (س + ٤)(س + ٢) = ١ **اعتبر** √٢ = ١,٤

الحل

س^{٢} + ٦س + ٨ − ١ = ٠ ‏ ‏ ‏ ‏ س^{٢} + ٦س + ٧ = ٠

أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٧

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{-(٦) \pm \sqrt{(٦)^{٢} - ٤(١)(٧)}}{٢ \times ١} = \frac{-٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٢٨}}{٢}$$

$$= \frac{-٦ \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{-٦ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = -٣ \pm \sqrt{٢} = -٣ \pm ١,٤$$

س = −٣ + ١,٤ = −١,٦ ‏ ‏ ‏ ‏ س = −٣ − ١,٤ = −٤,٤

مجموعة الحل = {−٤,٤ ، −١,٦}

مثال (٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة $\text{س} - \frac{٣}{\text{س}} = ١$ **اعتبر** √١٣ = ٣,٦

الحل

$\text{س} - \frac{٣}{\text{س}} = ١$ ‏ ‏ ‏ ‏ س^{٢} − س − ٣ = ٠

أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = −٣

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{-(-١) \pm \sqrt{(-١)^{٢} - ٤(١)(-٣)}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{١ + ١٢}}{٢}$$

$$= \frac{١ \pm \sqrt{١٣}}{٢} = \frac{١ \pm ٣,٦}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{١ + ٣.٦}{٢} = \frac{٤.٦}{٢} = ٢,٣ \qquad \text{س} = \frac{١ - ٣.٦}{٢} = \frac{-٢.٦}{٢} = -١,٣$$

مجموعة الحل = {−١,٣ ، ٢,٣}

مثال (٧)

اوجد مجموعة حل المعادلة $١ + \frac{٢}{س} = \frac{٥}{س^{٢}}$ مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل $١ + \frac{٢}{س} = \frac{٥}{س^{٢}}$ **بضرب الطرفين** $\times$ س^{٢} **للتخلص من المقام**

$س^{٢} + ٢س = ٥$ $س^{٢} + ٢س - ٥ = ٠$

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٥

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(٢) \pm \sqrt{(٢)^{٢} - ٤(١)(-٥)}}{٢ \times ١} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٠}}{٢}$$

$$= \frac{-٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٢\sqrt{٦}}{٢} = -١ \pm \sqrt{٦} = -١ \pm ٢,٤٥$$

$س = -١ + ٢,٤٥ = ١,٤٥$ $س = -١ - ٢,٤٥ = -٣,٤٥$

مجموعة الحل = {١,٤٥ ، −٣,٤٥}

مثال (٨)

اوجد مجموعة حل المعادلة س (٣ − س) = −٢ مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحل

$س(٣ - س) = -٢$ $٣س - س^{٢} = -٢$

$س^{٢} - ٣س - ٢ = ٠$

أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −٢

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤(١)(-٢)}}{٢ \times ١} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ + ٨}}{٢}$$

$$= \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٢} = \frac{٣ \pm ٤.١٢٣}{٢}$$

$س = ٣,٥٦٢$ $س = -٠,٥٦٢$ **مجموعة الحل** = {−٠,٥٦٢ ، ٣,٥٦٢}



تمارين على القانون العام

[١] اكمل ما يأتى

١. القانون العام للمعادلة أ س^{2} + ب س + جـ = ٠ هو .... حيث أ ≠ صفر

٢. إذا كانت ء س^{2} + هـ س + و = ٠ فان س = ... حيث ء ≠ صفر

٣. القانون العام للمعادلة أ$^{-1}$ س^{2} + ب$^{-1}$ س + جـ$^{-1}$ = ٠ هو .... حيث أ ، ب ، جـ ≠ صفر

٤. إذا كانت أ$^{-1}$ س$^{-2}$ + ب$^{-1}$ س$^{-1}$ + جـ$^{-1}$ = ٠ فان س=........حيث أ ، ب ، جـ ≠ صفر

٥. إذا كانت أس$^{-2}$ + ب س$^{-1}$ + جـ = ٠ فان س=.........حيث أ ، ب ، جـ ≠ صفر

٦. القانون العام للمعادلة أ ب س^{2} + ب جـ س + أ جـ = ٠ هو .... حيث أ ب ≠ صفر

٧. القانون العام للمعادلة $\frac{أ}{ب}$ س^{2} + $\frac{ب}{جـ}$ س + $\frac{أ}{جـ}$ = ٠ هو .... حيث أ ب ≠ صفر

٨. جذرى المعادلة جـ س^{2} + أ س + ب = ٠ هو .... حيث جـ ≠ صفر

٩. مجموعة حل المعادلة س^{2} + س + ١ = ٠ فى ح هى ....

١٠. مجموعة حل المعادلة س^{2} +٣س + ١ = ٠ فى ح هى ....

١١. مجموعة حل المعادلة س^{2} = ٤ – ٢س فى ح هى ....

١٢. مجموعة حل المعادلة س^{2} – ١ = ٥س فى ح هى ....

[٢] باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلات التالية مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى

١. س^{2} – ٤س – ٦ = ٠

٢. ٢ س + ٢ – س^{2} = ٠

٣. ٢س^{2} + ٥س – ٤ = ٠

٤. ٣س^{2} + ٧س – ٨ = ٠

٥. ٥س^{2} – ٣س – ١ = ٠

٦. س – س^{2} + ١ = ٠

٧. ٢س^{2} – ١٢س + ١١ = ٠

٨. ٣س^{2} + ٢س = ٤

٩. ٥س^{2} + ٣س – ١ = ٠

١٠. ٣ س^{2} – ٦س + ١ = ٠

١١. ٢ س^{2} – ١٢ س + ١١ = ٠

١٢. ٧س^{2} + ٢س = ٤

[٣] باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلات التالية

١. س (س – ٤) + ١ = ٠

٢. س (س + ١) = ٣

٣. س (س – ٥) = ٧

٤. (س + ٣)(س – ١) = –١

٥. س^{2} (٢س – ١) – ٢ س = ٠

٦. (٢س – ٣)^{2} = ٣

٧. (س – ٢)^{2} – ٣ (س – ٢) – ١٠ = ٠

٨. (٢س – ١)^{2} – (س – ٤)(س – ٢) = ٠

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

Mr : Walid Rushdy 01112467874 01062220750



[٤] أوجد مجموعة حل المعادلات التالية مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى حيث $\text{س} \neq ٠$

❶ $\text{س} - ١٠ + \frac{٧}{\text{س}} = \text{صفر}$ ❷ $\text{س} = ١ + \frac{٣}{\text{س}}$ ❸ $\text{س} + \frac{٣}{\text{س}} = ٥$

❹ $\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ٣$ ❺ $\text{س} + ٢ = \frac{٥}{\text{س}}$ ❻ $\text{س} + ٤ = \frac{٧}{\text{س}}$

❼ $١ + \frac{٢}{\text{س}} = \frac{٥}{\text{س}^٢}$ ❽ $\text{س} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س}} = ٣$ ❾ $\frac{٢\text{س} + ٣}{٢} = \frac{١}{٢\text{س} - ٣}$

[٥] باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلات التالية مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى

❶ $\text{س}^٢ - ٢\text{س} = ٢$ حيث $\sqrt{٣} = ١,٧$ تقريبا

❸ $\text{س}^٢ + ١١ = ٧\text{س}$ حيث $\sqrt{٥} = ٢,٢$ تقريبا

❹ $\text{س}^٢ + ٣\text{س} = ٢$ حيث $\sqrt{١٧} = ٤,١٢$ تقريبا

❺ $\text{س}^٢ - ٥ = -٢\text{س}$ حيث $\sqrt{٦} = ٢,٤$ تقريبا

⓭ $\text{س}(\text{س} - ١) = ٣$ علما بأن $\sqrt{١٣} = ٣,٦$

⓮ $\text{س}(٢\text{س} - ٧) = -٤$ علما بأن $\sqrt{١٧} = ٤,١٢$

⓯ $(\text{س} - ٣)^٢ - ٣(\text{س} - ٣) + ١ = ٠$ علما بأن $\sqrt{٥} = ٢,٢٤$ تقريبا

⓰ $٧\text{س} = ٢(\text{س}^٢ + ٢)$ علما بأن $\sqrt{١٧} = ٤,١٢$

[٦] ما هى القيم التقريبية لجذور المعادلة $\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١$ علما بأن $\sqrt{٢} = ١,٤$

[٧] إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $\text{أ}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$ حيث ل > م أثبت أن: $\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

[٨] إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $\text{أ}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$ حيث ل > م أثبت أن : $\text{ل}\,\text{م} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

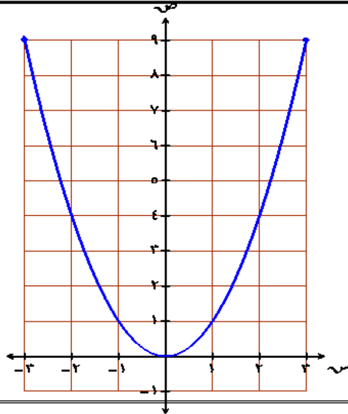
[٩] إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $\text{أ}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$ حيث ل > م

اثبت أن : $\text{ل} - \text{م} = \frac{\sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{\text{أ}}$

تمارين على ايجاد مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بيانيا

مثال ()

مثل بيانيا الدالة د(س) = س ٢ ومن الرسم أوجد احداثى نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ، القيمة العظمى والصغرى للدالة ومجموعة حل المعادلة د(س) = صفر



معادلة محور التماثل س = ٠

نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

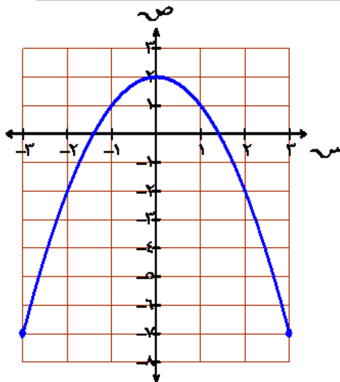
قيمة صغرى = ٠

جذرى المعادلة هى ٠ ، ٠

مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى { ٠ }

مثال ()

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢ – س ٢ و من الرسم أوجد احداثى نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ، القيمة العظمى والصغرى للدالة ومجموعة حل المعادلة د(س) = صفر على الفترة [– ٣ ، ٣]



معادلة محور التماثل س = ٠

نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٢)

قيمة عظمى = ٢

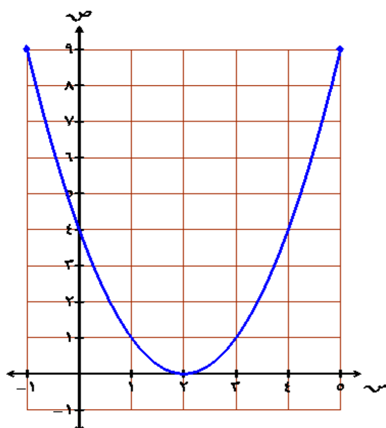
جذرى المعادلة هى ١,٤ ، – ١,٤

مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى { ١,٤ ، – ١,٤ }

مثال ()

مثل بيانيا الدالة د(س) = (س–٢)٢ ومن الرسم أوجد احداثى نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ، القيمة العظمى والصغرى للدالة ومجموعة حل المعادلة د(س) = صفر على الفترة [– ١ ، ٥]

الحل



معادلة محور التماثل س = ٢

نقطة رأس المنحنى (٢ ، ٠)

قيمة صغرى = ٠

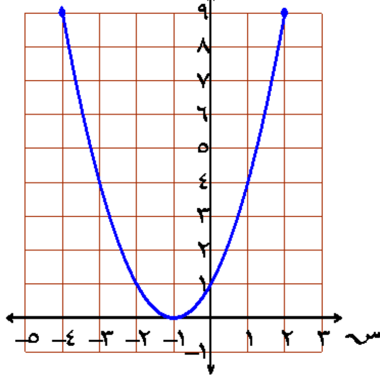
جذرى المعادلة هى ٢ ، ٢

مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

هى { ٢ }

مثال ( )

مثل بيانيا الدالة د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ ومن الرسم أوجد احداثى نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ، القيمة العظمى والصغرى للدالة ومجموعة حل المعادلة د (س) = صفر على الفترة [–٤ ، ٢]



معادلة محور التماثل س = –١

نقطة رأس المنحنى (–١، ٠)

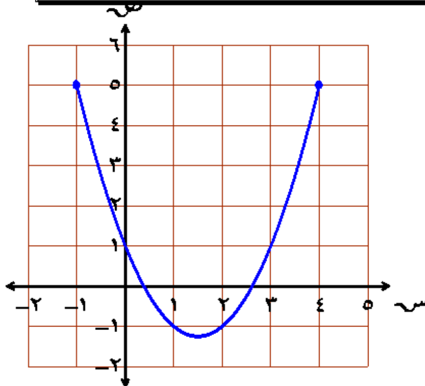
قيمة صغرى = ٠

جذرى المعادلة هى –١ ، –١

مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى { –١ }

مثال ( )

مثل بيانيا الدالة د (س) = ١ –٣س + س^{٢} ومن الرسم أوجد احداثى نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ، القيمة العظمى والصغرى للدالة ومجموعة حل المعادلة د (س) = صفر على الفترة [–١ ، ٤]



معادلة محور التماثل س = ١,٥

نقطة رأس المنحنى (١,٥ ، –١,٢٥)

قيمة صغرى = –١,٢٥

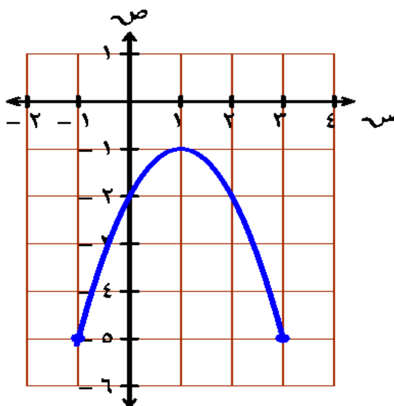
جذرى المعادلة هى ٢,٧ ، ٠,٣

مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى { ٢,٧ ، ٠,٣ }

مثال ( )

مثل بيانيا الدالة د (س) = ٢ س – ٢ – س^{٢} ومن الرسم أوجد احداثى نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ،القيمة العظمى والصغرى للدالة ومجموعة حل المعادلة د (س) = صفر على الفترة [–١ ، ٣]

الحل



معادلة محور التماثل س = ١

نقطة رأس المنحنى (١ ، –١)

قيمة عظمى = –١

جذرى المعادلة ليس لها جذور حقيقية

مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

هى { } أو ∅



(١٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان منحنى الدالة التربيعية لا يقطع محور السينات فى أى نقطة فان عدد حلول المعادلة د (س) = صفر فى ح هو ....

(١) حل وحيد (٢) حلان (٣) عدد لا نهائى (٤) صفر

٢) إذا كان منحنى الدالة د (س) = س^{٢} + ٥ لا يقطع محور السينات فان مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى ....

(١) { ٥ ، –٥ } (٢) { –٥ } (٣) { ٠ } (٤) ∅

٣) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يمس محور السينات فان عدد حلول المعادلة د (س) = صفر فى ح هو ....

(١) حل وحيد (٢) حلان (٣) عدد لا نهائى (٤) صفر

٤) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات فى نقطتين فان عدد حلول المعادلة د (س) = صفر فى ح هو ....

(١) حل وحيد (٢) حلان (٣) عدد لا نهائى (٤) صفر

٥) إذا كان منحنى الدالة د (س) = س^{٢} + ٤ لا يقطع محور السينات فان مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٤ = ٠ هى ....

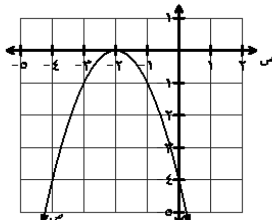
(١) { –٢ ، ٢ } (٢) { –٤ ، ٠ } (٣) { –٢ ، ٠ } (٤) ∅

٦) إذا كان منحنى د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يمس محور السينات فان عدد حلول المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ فى ح هو ....

(١) حل وحيد (٢) حلان (٣) عدد لا نهائى (٤) صفر

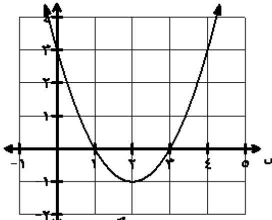
٧) إذا كانت : س ∈ ح فان المعادلة : س^{٢} + س + ١ = ٠ يكون لها ....

(١) لها جذران (٢) لها جذر وحيد (٣) لا يوجد لها جذور (٤) لها عدد لا نهائى من الجذور



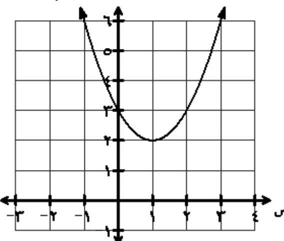
٨) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

(١) { –٢ } (٢) { –٢ ، ٤ }
(٣) { ٤ } (٤) ∅



٩) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

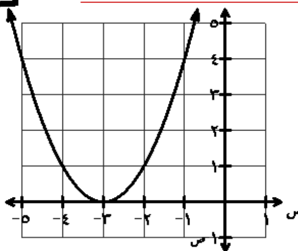
(١) { ١ ، ٠ } (٢) { ٣ ، ٠ }
(٣) { ١ ، –١ } (٤) { ٣ ، ١ }

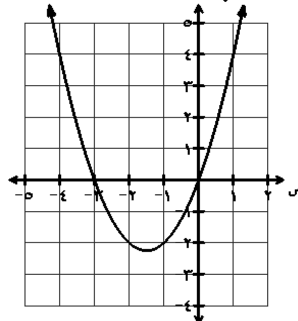


١٠) إذا كان الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة التربيعية د (س) فان مجموعة حل المعادلة د (س) صفر فى ح هى ....

(١) { ١ } (٢) { ٢ ، ١ }
(٣) { ٢ } (٤) ∅







(١١) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث د (س) = ...

(١) ٣س^{٢} –٢٧ (٢) س^{٢} + ٦س+ ٩

(٣) س^{٢} –٦ س + ٩ (٤) –٣س^{٢} + ٢٧

(١٢) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث د (س)

فان مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى ....

(١) { ٠ } (٢) { –٣ }

(٣) { ٠ ، –٣ } (٤) Ø

[١٣] مثل بيانيا منحنى الدالة د (س) = – س^{٢} متخذاً س ∈ [–٣ ، ٣] ومن ثم أوجد

(١) نقطة رأس المنحنى (٢) جذرى المعادلة د (س) = صفر (٣) القيمة العظمى أو الصغرى

[١٤] مثل بيانيا منحنى الدالة د(س) = س^{٢} – ١ متخذاً س ∈ [–٣ ، ٣] ومن ثم أوجد

(١) نقطة رأس المنحنى (٢) جذرى المعادلة د (س) = صفر (٣) القيمة العظمى أو الصغرى

[٧] ارسم منحنى الدالة د (س) = س^{٢} على الفترة [–٣ ، ٣] بيانيا ثم أوجد مجموعة حل المعادلة

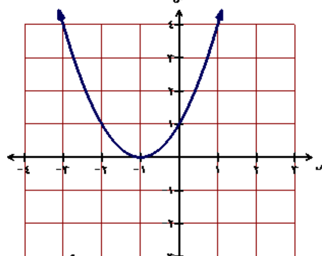
د (س) = ٢س + ٥ جبريا علما بأن $\sqrt{٦}$ = ٢,٤٥ تقريبا

[٨] إذا كانت د (س) = س^{٢} – ٣س – ٢ فأوجد د(–١) ، د(٠) ، د(٢)

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) ٠ حيث $\sqrt{١٧}$ = ٤,١

[٩] ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = ٣ + ٢س – س^{٢} على الفترة [–٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد

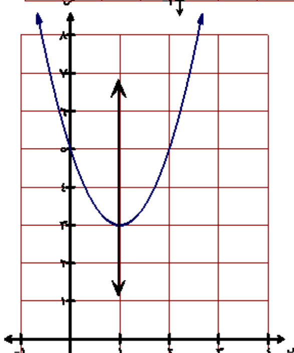
(١) مجموعة حل المعادلة س^{٢} –٢س – ٣ (٢) القيم التقريبية للعدد س عندما د (س) = ٢



[١٥] الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د :

(١) أوجد نقطة رأس التماثل للمنحنى (٢) أوجد معادلة خط التماثل للمنحنى .

(٣) أوجد القيمة العظمى أو الصغرى (٤) جذرى المعادلة د (س) = صفر

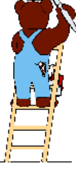


[١٦] فى الشكل المقابل :

د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ (حيث أ ≠ صفر)

فإذا كان معادلة محور التماثل ل هى س = ١ ،

أن القيمة الصغرى للدالة د هى ٣ أوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ



الوحدة الثانية

١ مجموعة أصفار الدالة كثيرات الحدود

٢ دالة الكسر الجبرى

٣ تساوى كسرين جبريين

٤ العمليات على الكسور الجبرية (جمع – طرح – ضرب – قسمة)



دالة الكسر الجبرى

مجموعة أصفار الدالة

هى قيم س التى تجعل الدالة د (س) = صفر ويرمز لها بالرمز ص (د)

وهى مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر

مجموعة أصفار د (س) = ب حيث ب $\neq$ صفر هى ص (د) = { } = $\varnothing$

أمثلة د (س) = ٣   د (س) = −٤   د (س) = $\sqrt{٣}$

مجموعة أصفار د (س) = صفر حيث هى ص (د) = ع

مجموعة أصفار الدالة الخطية د (س) = أ س + ب هى ص (د) = $\frac{-ب}{أ}$

أوجد مجموعة أصفار الدالة ① د (س) = ٢س + ٤   ② د (س) = ٥س

نوجد د (س) = صفر

① ٢س + ٤ = ٠ ∴ س = $\frac{-٤}{٢}$ ∴ س = −٢ ∴ ص (س) = −٢

② ٥س = ٠ ∴ س = ٠ ∴ ص (س) = ٠

مجموعة أصفار الدوال التى ليس لها تحليل أو التى مميزها ب^{٢} − ٤ أ جـ = **عدد سالب**
يكون فيها ص (د) = $\varnothing$

د (س) = س^{٢} + س + ١   د (س) = س^{٢} + ٢٥

د (س) = س^{٢} − ٦س + ١١   د (س) = س^{٤} + ١

د (س) = (س^{٢} + ١) (س^{٢} − ٢س + ٧)

مجموعة أصفار الدوال التى ليس لها تحليل أو التى مميزها ب^{٢} − ٤ أ جـ = صفر **يكون لها**
صفران متساويان وتكون فيها د (س) = **مربع كامل**

مثال ١

أوجد مجموعة أصفار الدالة ❶ د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ ❷ د(س) = ٦س − س^{٢} − ٩

❶ نوجد د(س) = صفر ∴ س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

∴ (س − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ١ ∴ ص(د) = { ١ }

❷ نوجد د(س) = صفر ∴ −(س^{٢} − ٦س + ٩) = ٠

∴ (س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = ٣

∴ ص(د) = { ٣ }

مجموعة أصفار الدوال التى ليس لها تحليل أو التى مميزها ب^{٢} − ٤ أ جـ = عدد موجب
يكون لها صفران مختلفان حيث نوجد د(س) = صفر ونحلل

مثال ٤

أوجد مجموعة أصفار الدالة ❶ د(س) = س^{٢} − ٧س + ١٢ ❷ د(س) = ٢س^{٢} − س − ٣

❶ نوجد د(س) = صفر ∴ س^{٢} − ٧س + ١٢ = ٠

∴ (س − ٤)(س − ٣) = ٠ ∴ س = ٣ ، س = ٤

∴ ص(د) = { ٤ ، ٣ }

❷ نوجد د(س) = صفر ∴ (س + ١)(٢س − ٣) = ٠

∴ س + ١ = ٠ ∴ ٢س − ٣ = ٠

∴ س = −١ ، ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ص(د) = { −١ ، $\frac{٣}{٢}$ }

مثال ٧

أوجد مجموعة أصفار الدالة ❶ د(س) = ٢س^{٢} − ١٨ ❷ ٢س^{٢} − ٣س

❶ نوجد د(س) = صفر ∴ ٢س^{٢} − ١٨ = ٠ ∴ ٢(س^{٢} − ٩) = ٠

∴ ٢(س + ٣)(س − ٣) = ٠ ∴ س = ٣ ، س = −٣ ∴ ص(د) = { −٣ ، ٣ }

❷ نوجد د(س) = صفر ∴ س(٢س − ٣) = ٠

∴ س(٢س − ٣) = ٠ ∴ س = صفر ، س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ص(د) = { صفر ، $\frac{٣}{٢}$ }

مثال ٩

أوجد مجموعة أصفار الدالة $د(س) = س^{٣} - ٢٧$

نوجد $د(س) = صفر$ $(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩) = ٠$

$(س - ٣) = ٠$ $س = ٣$

أو $(س^{٢} + ٣س + ٩) = ٠$ مميزها عدد سالب $\therefore (س^{٢} + ٣س + ٩) \neq ٠$

مثال ١٠   متفوقين

أوجد مجموعة أصفار الدالة $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٧٥$

نوجد $د(س) = صفر$ $\therefore س^{٣} - ٢س^{٢} - ٧٥ = ٠$

$س^{٣} - ٢س^{٢} - ١٢٥ + ٥٠ = ٠$ $\therefore س^{٣} - ١٢٥ - ٢س^{٢} + ٥٠ = ٠$

$\therefore (س - ٥)(س^{٢} + ٥س + ٢٥) - ٢(س - ٥)(س + ٥) = ٠$

$\therefore (س - ٥)[س^{٢} + ٥س + ٢٥ - ٢(س + ٥)] = ٠$

$\therefore (س - ٥) = ٠$ $س = ٥$

$\therefore س^{٢} + ٥س + ٢٥ - ٢س - ١٠ = ٠$

$\therefore س^{٢} + ٣س + ١٥ = ٠$ $\therefore$ مميزها عدد سالب

$\therefore (س^{٢} + ٣س + ١٥) \neq ٠$

$ص(د) = \{٥\}$

مثال ١١

إذا كان $ص(د) = \{٣\}$ **، وكانت** $د(س) = م س - ١٢$ **فإن** م = ...

الحل نوجد $د(س) = صفر$ $د(٣) = ٠$

$\therefore ٣م - ١٢ = ٠$ $\therefore ٣م = ١٢$ $\therefore م = ٤$

مثال ١٢

إذا كان $ص(د) = \{٢\}$ **، وكانت** $د(س) = س^{٣} - م$ **فإن** م = ...

الحل نوجد $د(س) = صفر$ $\therefore د(٢) = ٠$

$\therefore (٢)^{٣} - م = ٠$ $\therefore ٨ - م = ٠$ $\therefore م = ٨$

مثال ١٢

إذا كان ص (د) = { ١ ، –٢ } ، **وكانت** د (س) = س^{٢} + س + م **فان** م = ...

نوجد د (س) = صفر ∴ د (١) = ٠ أو د (–٢) = ٠

∴ (١)^{٢} + ١ + م = ٠ ∴ ٢ + م = ٠

∴ م = –٢

مثال ١٣

إذا كان ص (د) = { ٥ } ، **وكانت** د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + م **فان** م = ...

نوجد د (س) = صفر د (٥) = ٠

∴ (٥)^{٣} – ٣ (٥)^{٢} + م = ٠ ∴ ١٢٥ – ٧٥ + م = ٠

∴ ٥٠ + م = ٠ ∴ م = – ٥٠

مثال ١٤

إذا كان ص (د) = ∅ **وكانت** د (س) = س^{٢} + م **فان** م ∈ ....

ص (د) = ∅ ∴ د (س) = ليس لها تحليل

∴ س^{٢} + م ≠ ٠ ∴ م ≠ – س^{٢}

∴ م لا تساوى أى عدد سالب أو صفر

∴ م ∈ ع$^{+}$ ∴ م ∈] صفر ، ∞ [

ملاحظة

إذا كان منحنى الدالة التربيعية لا يقطع محور السينات فان مجموعة أصفار الدالة = ∅

مثال ١٥

إذا كان ص (د) = { ٣ ، –٣ } وكانت د (س) = س^{٢} + م فان م = ...

نوجد د (س) = صفر ∴ د (٣) = ٠

∴ (٣)^{٢} + م = ٠ ∴ ٩ + م = ٠

∴ م = –٩

مثال ١٦

إذا كان ص (د) = { ٣ ، ٥ } وكانت د (س) = ٲ س^{٢} + ب س + ١٥

فإن ٲ ، ب = ...

الحل نوجد د (س) = صفر ∴ د (٣) = ٠

∴ (٣)^{٢} ٲ + ٣ب + ١٥ = ٠ ∴ ٩ ٲ + ٣ب = −١٥

| ٣ ٲ + ب = −٥ | .... (١)

د (٥) = ٠ ∴ (٥)^{٢} ٲ + ٥ب + ١٥ = ٠ ∴ ٢٥ ٲ + ٥ب = −١٥

| ٥ ٲ + ب = −٣ | .... (٢) بطرح المعادلتين

ٲ = ١ ب = −٨

مثال ١٧

إذا كان ص (د) = { ٣ ، ٠ } ، د (١) = ٢

وكانت د (س) = ٲ س^{٢} + ب س + جـ فإن ٲ ، ب ، جـ = ...

الحل

ص (د) = { ٣ ، ٠ } نوجد د (س) = صفر

د (٠) = ٠

ٲ (٠)^{٢} + ب (٠) + جـ = ٠ | جـ = ٠ |

د (س) = ٲ س^{٢} + ب س د (٣) = ٠

٩ ٲ + ٣ب = ٠ ٣ٲ + ب = ٠

| ٣ ٲ + ب = ٠ | .... (١)

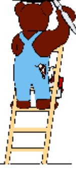
د (٥) = ٠

(١)^{٢} ٲ + (١) ب = ٢

| ٲ + ب = ٢ | .... (٢)

بطرح المعادلتين

٢ ٲ = −٢ ٲ = −١ ب = ٣



تمارين ( ) على أصفار الدالة

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ مجموعة أصفار الدالة د(س) = س − ٢ هي ....

(١) { صفر } (٢) ∅ (٣) ح − {٢} (٤) { ٢ }

❷ مجموعة أصفار الدالة د(س) = س + ٥ هي ....

(١) { ٥ } (٢) ∅ (٣) {−٥} (٤) ح

❸ مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٥ هي ....

(١) { صفر } (٢) ∅ (٣) ح (٤) { ٥ }

❹ مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٢س + ٣ هي ....

(١) { ٢ ، −٣ } (٢) { $\frac{-٣}{٢}$ } (٣) { $\frac{٣}{٢}$ } (٤) { ٣، ٢ }

❺ مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٣س − ٤ هي ....

(١) { ٢ ، ٤ } (٢) { ٣ ، ٤ } (٣) { $\frac{-٤}{٣}$ } (٤) { $\frac{٤}{٣}$ }

❻ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^{٣}$ هي ....

(١) { صفر } (٢) ∅ (٣) ح − { ٠ } (٤) { ٥ }

❼ مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٥س هي ....

(١) { ٥ } (٢) ∅ (٣) { ٠ } (٤) { −٥ }

❽ مجموعة أصفار الدالة د(س) = −٨ − س هي ....

(١) ح − { −٨ } (٢) ∅ (٣) ح − { ٨ } (٤) { ٨ }

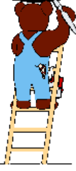
❾ مجموعة أصفار الدالة د(س) = س(س − ٢) هي ....

(١) { ٢ ، −١ } (٢) { ٠ ، −٢ } (٣) ح − { ٠ ، ٢ } (٤) { ٠، ٢ }

❿ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^{٢}$ − ١ هي ....

(١) { ١ } (٢) ∅ (٣) { ± ١ } (٤) { −١ }

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



⑪ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ + ٤ هي ....

(١) { –٤ } (٢) ∅ (٣) { ± ٤ } (٤) { ±٢ }

⑫ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ – ٩ هي ....

(١) { –٩ } (٢) ∅ (٣) { ± ٣ } (٤) { ٣ }

⑬ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ + ٢س – ١٥ هي ....

(١) { –٥، ٣ } (٢) { ٣ ، ٥ } (٣) { ٣ ، –٥ } (٤) { –٣ ، –٥ }

⑭ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ هي ....

(١) { ١،–١ } (٢) { ٠ } (٣) { ٢ } (٤) ح–{ ٠ }

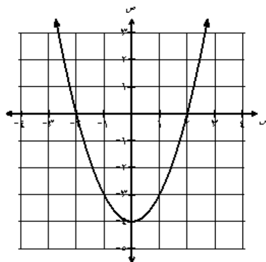
⑮ مجموعة أصفار الدالة د(س) = س (س – ١) هي ....

(١) { ١ } (٢) { ٠ } (٣) { ٠ ، ١ } (٤) ح–{ ٠، ١ }

⑯ مجموعة أصفار الدالة د(س) = (س – ١ $)^٢$ (س + ٢) هي ....

(١) { ٢، –١ } (٢) { –١، ٢ } (٣) { ١ ، ٢ } (٤) { ١، –٢ }

⑰ مجموعة أصفار الدالة د(س) المرسومة فى الشكل المقابل هي ....



(١) { ١، –٢ ، ٠ } (٢) { ٠ } (٣) { ٢ ، –٢ } (٤) { ٠ ، –٤ }

⑱ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ – س + ١ هي ....

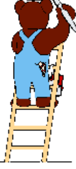
(١) { –١ } (٢) ∅ (٣) { ± ١ } (٤) { ١ }

⑲ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $\frac{س – ٥}{س^٢ – ١٦}$ هي ....

(١) { ٥ } (٢) ∅ (٣) { ± ٤ } (٤) { ٤ ، ٥ }

⑳ مجموعة أصفار الدالة د(س) = $\frac{س}{س^٢ – ٢٥}$ هي ....

(١) { ٠ } (٢) ∅ (٣) { ± ٥ } (٤) { ٠ ، ٥ }



(٢) اكمل ما يأتي :

١) مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٩س هي ....

٢) مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٧ هي ....

٣) مجموعة أصفار الدالة د(س) = س + ٩ هي ....

٤) مجموعة أصفار الدالة د(س) = س − ٣ هي ....

٥) مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٢ س − ٥ هي ....

٦) مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٣ س − ٧ هي ....

٧) مجموعة أصفار الدالة د(س) = صفر هي ....

٨) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ − ١٦ هي ....

٩) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ + ٩ هي ....

١٠) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ + ٧ س + ١٠ هي ....

١١) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ + ٣س − ١٥ هي ....

١٢) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٣$ − ٢٧ هي ....

١٣) مجموعة أصفار الدالة د(س) = س(س − ١) هي ....

١٤) مجموعة أصفار الدالة د(س) = (س − ١)(س − ٢) هي ....

١٥) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢$ + ٣س هي ....

١٦) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ١}$ هي ....

١٧) مجموعة أصفار الدالة د(س) = س($س^٢$ − ١) هي ....

١٨) إذا كانت ن(س) = $\frac{س + ٤}{س - ٥}$ فان ن(س) ليس لها معنى عند س = ...

١٩) إذا كان س = −١ إحدى أصفار الدالة ن(س) = $س^٢$ − ٢س + جـ فان جـ = ...

٢٠) إذا كان ن(س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ - ٢٥}$ = صفر فان س = ...

مجال دالة الكسر الجبرى

إذا كان ق ، ك دوال كثيرات حدود فان الدالة التى قاعدتها

$ن(س) = \frac{ق(س)}{ك(س)}$ تسمى دالة كسرية أو دالة الكسر الجبرى

مجال الكسر الجبرى م = ح − مجموعة أصفار مقام الكسر

م = ح − { أصفار المقام }

ص (د) =مجموعة أصفار د (س) = { أصفار البسط } −{ أصفار المقام }

مثال ١

عين مجال ومجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{س + ١}{٣}$ ، $ن(س) = \frac{٣}{س + ١}$

❶ $د(س) = \frac{س + ١}{٣}$ ∴ مجال د (س) = ح ∴ ص (د) = { −١ } − ∅ = { −١ }

❷ $ن(س) = \frac{٣}{س + ١}$ ∴ ص (ن) = ∅ −{ −١ } = ∅ ∴ مجال ن (س) = ح − { −١ }

مثال ٢

عين مجال ومجموعة أصفار الدالة ❶ $د(س) = \frac{٥س}{س − ٤}$ ❷ $د(س) = \frac{س + ٣}{س − ٦}$

❶ ∴ مجال د (س) = ح − { ٤ } ∴ ص (د) = { ٠ } − { ٤ } = { ٠ }

❷ ∴ ص (د) = { −٣ } − { ٦ } = { −٣ } ∴ مجال د (س) = ح − { ٦ }

مثال ٤

عين مجال ومجموعة أصفار الدالة ❶ $د(س) = \frac{٢س^{٢} + ١}{٣س}$ ❷ $د(س) = \frac{س − ٥}{س^{٢}}$

❶ ∴ ص (د) = { } − { ٠ } = ∅ ∴ مجال د (س) = ح − { ٠ }

❷ ∴ ص (د) = { ٥ } − { ٠ } = { ٥ } ∴ مجال د (س) = ح − { ٠ }

مثال٦

عين مجال ومجموعة أصفار الدالة ❶ $د(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ + ١}$ ❷ $د(س) = \frac{س^٢}{س^٢ - ٤}$

❶ ∴ مجال د(س) = ح ∴ ص(د) = {٢} − {} = {٢}

❷ $د(س) = \frac{س^٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$ ∴ مجال د(س) = ح − {٢ ، −٢}

∴ ص(د) = {٠} − {٢ ، −٢} = {٠}

مثال٨

عين مجال ومجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{٣س - ١٢}{س^٢ - ٧س + ١٢}$

$د(س) = \frac{٣س - ١٢}{س^٢ - ٧س + ١٢} = \frac{٣(س - ٤)}{(س - ٣)(س - ٤)} = \frac{٣}{س - ٣}$

مجال د(س) = ح − {٣ ، ٤}

ص(د) = {٤} − {٣ ، ٤} = { }

مثال١٠

عين مجال ومجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{٣س^٢ - ١٢}{٢س^٢ - ٣س - ٢}$

$د(س) = \frac{٣(س^٢ - ٤)}{(٢س + ١)(س - ٢)} = \frac{٣(س - ٢)(س + ٢)}{(٢س + ١)(س - ٢)}$

مجال د(س) = ح − {$-\frac{١}{٢}$ ، ٢}

ص(د) = {٢ ، −٢} − {$-\frac{١}{٢}$ ، ٢} = {−٢}

تمارين (٢) على مجال الكسر الجبري

(أ) أوجد مجال كلا من الدوال التالية

❶ $د(س) = \frac{س + ٧}{س - ١}$

❷ $د(س) = \frac{٨}{٤ + س}$

❸ $د(س) = \frac{س - ١}{٢س - ٤}$

❹ $د(س) = \frac{س + ٢}{٥ + س}$

❺ $د(س) = \frac{٢س + ٥}{س}$

❻ $د(س) = \frac{٣س - ٥}{٥}$

❼ $د(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ٤}$

❽ $د(س) = \frac{٣س + ٢}{س^{٢} + ١٦}$

❾ $د(س) = س^{-٢}$

❿ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} - ١}$

⓫ $د(س) = \frac{س - ١}{٣}$

⓬ $د(س) = \frac{٢ + س}{س}$

⓭ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} - ١}$

⓮ $د(س) = \frac{١}{س}$

⓯ $د(س) = س^{٢} - ٤$

⓰ $د(س) = \frac{س}{س(س - ١)(س^{٢} - ٤)}$

⓱ $د(س) = \frac{٦}{س^{٢} + ١}$

⓲ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٢س - ١٥}$

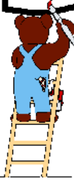
أكمل ما يأتي

❶ $د(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - ٤س + جـ}$ هو ح − { ٢ } فإن جـ = ...

❷ مجال الدالة $د(س) = \frac{س + ٥}{س - ب}$ هو ح − { ٢ } فإن ب = ...

❸ $د(س) = \frac{٣}{س^{٢} - ٤}$ فإن د (٢) = ...

❹



المجال المشترك لعدة دوال (كسور) جبرية

م = ح – { أصفار المقامات لجميع الكسور }

مثال ١

المجال المشترك للدالتين د (س) = $\frac{٣}{٢س}$ ، ن (س) = $\frac{٥}{س - ١}$

د (س) = $\frac{٣}{٢س}$ ∴ مجال د (س) = ح – { ٠ }

ن (س) = $\frac{٥}{س - ١}$ ∴ مجال ن (س) = ح – { ١ }

∴ **المجال المشترك** = ح – { ٠ ، ١ }

مثال ٢

المجال المشترك للدالتين د (س) = $\frac{٩}{٢س - ٦}$ ، ن (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٩}$

د (س) = $\frac{٩}{٢س - ٦}$ = $\frac{٩}{٢ (س - ٣)}$ ∴ مجال د (س) = ح – { ٣ }

ن (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٩}$ ∴ مجال ن (س) = ح

∴ **المجال المشترك** = ح – { ٣ }

مثال ٣

المجال المشترك للدالتين د (س) = $\frac{٤}{س^٣}$ ، ن (س) = $\frac{٧}{س^٢ - ١}$

د (س) = $\frac{٤}{س^٣}$ ∴ مجال د (س) = ح – { ٠ }

∴ ن (س) = $\frac{٧}{س^٢ - ١}$ = $\frac{٧}{(س - ١)(س + ١)}$ ∴ مجال ن (س) = ح – { ١ ، –١ }

∴ **المجال المشترك** = ح – { ٠ ، ١ ، –١ }

مثال ٤

المجال المشترك للدالتين $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^٢ - ٥\text{س}} = \frac{٢}{\text{س}(\text{س} - ٥)}$ مجال د(س) = ح − { ٠ ، ٥ }

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢} = \frac{\text{س}}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ١)}$ مجال ن(س) = ح − { −٢ ، −١ }

المجال المشترك = ح − { ٠ ، ٥ ، −١ ، −٢ }

مثال ٥

المجال المشترك للدالتين $\text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٢\text{س} - \text{س}^٢}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٥}{\text{س} - ٢}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٢\text{س} - \text{س}^٢} = \frac{٣}{\text{س}(٢ - \text{س})}$ مجال د(س) = ح − { ٠ ، ٢ }

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٥}{\text{س} - ٢}$ مجال ن(س) = ح − { ٢ }

المجال المشترك = ح − { ٠ ، ٢ }

مثال ٦

المجال المشترك للدالتين $\text{د}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}^٣ + ١}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

مجال د(س) = ح − { −١ } ، مجال ن(س) = ح − { ٠ ، −١ }

المجال المشترك = ح − { ٠ ، −١ }

مثال ٧

المجال المشترك للدالتين $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^٣ + ٢٧}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{-٧\text{س}}{\text{س} + ٣}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤}{٣\text{س}}$

مجال د(س) = ح − { −٣ } ، مجال ن(س) = ح − { −٣ }

، مجال ن(س) = ح − { ٠ }

المجال المشترك = ح − { ٠ ، −٣ }

مثال ٨

إذا كان د (س) = $\frac{٤}{س - م}$ **وكان مجال** د (س) = ع − { ٢ } **فإن** م = ...

مجال د (س) = ع − { ٢ }

س − م = صفر عند س = ٢ ٢ − م = ٠ م = ٢

مثال ٩

إذا كان د (س) = $\frac{١}{س + م}$ **وكان مجال** د (س) = ع − { ٥ } **فإن** م = ...

مجال د (س) = ع − { ٥ }

س + م = صفر عند س = ٥ ٥ + م = ٠ م = −٥

مثال ١٠

إذا كان د (س) = $\frac{٢س}{٢س - م}$ **وكان مجال** د (س) = ع − { ١٢ } **فإن** م = ...

مجال د (س) = ع − { ١٢ }

٢س − م = صفر عند س = ١٢ ٢ (١٢) − م = ٠ م = ٢٤

مثال ١١

إذا كان د (س) = $\frac{س^٢}{م س - ١}$ **وكان مجال** د (س) = ع − { ٧ } **فإن** م = ...

مجال د (س) = ع − { ٧ }

م س − ١ = صفر عند س = ٧ ٧م − ١ = ٠ م = $\frac{١}{٧}$

مثال ١٢

إذا كان د (س) = $\frac{س}{س - ٦}$ **وكان مجال** د (س) = ع − { ب } **فإن** ب = ...

مجال د (س) = ع − { ب }

س − ٦ = صفر عند س = ب ب − ٦ = ٠ ب = ٦

مثال ١٣

إذا كان د (س) = ٢س / (س^٢ − م س + ٢٥) **وكان مجال** د (س) = ح − { ٥ } فإن م = ...

مجال د (س) = ح − { ٥ }

س^٢ − م س + ٢٥ = صفر   عند س = ٥

(٥)^٢ − ٥م + ٢٥ = ٠   ٥٠ − ٥م = ٠   ٥م = ٥٠   م = ١٠

مثال ١٤

إذا كان د (س) = ٢س / (س^٢ − ٦ س + م) **وكان مجال** د (س) = ح − { ٣ } **فإن** م = ...

مجال د (س) = ح − { ٣ }   س^٢ − ٦س + م = صفر   عند س = ٣

(٣)^٢ − ٦ (٣) + م = ٠   ٩ − ١٨ + م = ٠   م = ٩

مثال ١٥

إذا كان د (س) = ٥س / ((س − م)(س + ٣)) **وكان مجال** د (س) = ح − { −٣ ، ٥ } **فإن** م =.....

مجال د (س) = ح − { −٣ ، ٥ }   (س − م) (س + ٣) = صفر   عند س = ٥

(٥ − م) (٥ + ٣) = ٠   (٥ − م) (٨) = ٠

٤٠ − ٨م = ٠   ٨م = ٤٠   م = ٥

مثال ١٦

إذا كان د (س) = (س − ٣) / (س^٢ + م س + ك) **وكان مجال** د (س) = ح − { ١ ، ٤ } **فإن** م =.......

مجال د (س) = ح − { ١ ، ٤ }

س^٢ + م س + ك = ٠   عند س = ١ ، س = ٤

١ + م + ك = ٠   ١٦ + ٤ م + ك = ٠ بطرح المعادلتين

٣ م + ١٥ = ٠   ٣ م = −١٥

م = −٥   ، ١ − ٥ + ك = ٠   −٤ + ك = ٠   ك = ٤

تمارين (٣) على المجال المشترك للدالتين

(أ) أكمل ما يأتي

❶ إذا كان : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٣}{٢\text{س}}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❷ إذا كان : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ١}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س} - ١}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❸ إذا كان : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{٣\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❹ إذا كان : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{٤}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٤}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❺ إذا كان : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{٢}{٥\text{س}}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{٣}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❻ إذا كان : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{٥}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❼ المجال المشترك للدالتين $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٧}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}$ هو ....

❽ المجال المشترك للدالتين $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٥}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ١}{٣}$ هو ....

❾ المجال المشترك للدالتين $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{٥}{\text{س}}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{٥}$ هو ....

❿ المجال المشترك للدالتين $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{١٥}{١ - \text{س}}$ هو ....

⓫ المجال المشترك للدالتين $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٣} - ١}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$ هو ....

⓬ المجال المشترك للدالتين $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}$ هو ....



(٢) اكمل ما يأتي

❶ إذا كان : $ن_١(س) = س^٢ - ٤$ ، $ن_٢(س) = \frac{١}{١ - س}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❷ إذا كان : $ن_١(س) = س^٢ - ١٦$ ، $ن_٢(س) = \frac{١}{س^٢ + ١٦}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❸ إذا كان : $د_١(س) = \frac{٣}{س^٢ + ٢٥}$ ، $د_٢(س) = \frac{٥}{س - ٢}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❹ إذا كان : $د_١(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ٤}$ ، $د_٢(س) = \frac{س}{س + ٢}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❺ إذا كان : $ن_١(س) = \frac{٣س + ٢}{س(س + ٢)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س + ٣}{(س - ٢)(س - ٢)}$

فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❻ إذا كان : $ن_١(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٥}{س + ٣}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س^٢ - ٥}{٣}$

فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❼ إذا كان : $د_١(س) = \frac{١}{س^٣ - ٢٧}$ ، $د_٢(س) = \frac{١}{س^٢ - ٩}$ فان المجال المشترك للدالتين هو ....

❽ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س - ٢}{س + ١}$ ، $ن_٢(س)$ مجالها ح - {-٢ ، ٣}

فان المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ ....

❾ إذا كان $ن_١(س) = \frac{٢س - ١}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ٢}{س - ك}$ وكان المجال المشترك للكسرين

هو ح - {٢ ، -١} فان ك = ...

❿ إذا كان مجال $ن_١(س)$ هو ح ، مجال $ن_٢(س)$ = هو ح - {٠ ، ٢}

، $ن_٣(س) = \frac{س}{(س - ٢)(س - ٥)}$ فان المجال المشترك للكسور الثلاثة ....

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

تساوى كسرين جبريين

نقول أن الدالتين د(س) ، ن(س) متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيين معا

١) مجال د(س) = مجال ن(س)

٢) د(س) بعد الاختزال = ن(س) بعد الاختزال لكل س ∈ المجال المشترك

إذا كان مجال د(س) ≠ مجال ن(س)

د(س) بعد الاختزال = ن(س) بعد الاختزال لكل س ∈ المجال المشترك

فان د(س) ≠ ن(س)

ولكن د(س) = ن(س) فى المجال المشترك = ح − { أصفار المقامين }

مثال ١

إذا كان د(س) = $\frac{٥س}{٥س-١٠}$ ، ن(س) = $\frac{٢س}{٢س-٤}$ **فهل** د(س) = ن(س) ؟

د(س) بعد الاختزال = $\frac{٥س}{٥(س-٢)}$ = $\frac{س}{س-٢}$ ∴ مجال د(س) = ح − { ٢ }

ن(س) = $\frac{٢س}{٢(س-٢)}$ = $\frac{س}{س-٢}$ ∴ مجال ن(س) = ح − { ٢ }

∵ مجال د(س) = مجال ن(س)

∵ د(س) بعد الاختزال = ن(س) بعد الاختزال لكل س ∈ المجال المشترك

∴ د(س) = ن(س)

مثال ٢

إذا كان د(س) = $\frac{٦س^٢}{٣س-٦}$ ، ن(س) = $\frac{١٢س^٢}{٦س-١٢}$ **فهل** د(س) = ن(س) ؟

الحل د(س) = $\frac{٦س^٢}{٣س-٦}$ = $\frac{٦س^٢}{٣(س-٢)}$ = $\frac{٢س^٢}{س-٢}$ مجال د(س) = ح − { ٢ }

ن(س) = $\frac{١٢س^٢}{٦س-١٢}$ = $\frac{١٢س^٢}{٦(س-٢)}$ = $\frac{٢س^٢}{س-٢}$ مجال ن(س) = ح − { ٢ }

∵ مجال د(س) = مجال ن(س)

∵ د(س) بعد الاختزال = ن(س) بعد الاختزال لكل س ∈ المجال المشترك

∴ د(س) = ن(س)

مثال ٣

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{٥س}}{\text{٥س}+١٥}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٣+\text{س}}{\text{س}^٣+\text{٣س}^٢+\text{س}+٣}$ **فهل** د(س) = ن(س) ؟

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{٥س}}{\text{٥س}+١٥} = \frac{\text{٥س}}{٥(\text{س}+٣)} = \frac{\text{س}}{\text{س}+٣}$$

مجال د(س) = ح − { −٣ }

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣+\text{س}}{\text{س}^٣+\text{٣س}^٢+\text{س}+٣} = \frac{\text{س}(\text{س}^٢+١)}{\text{س}^٢(\text{س}+٣)+(\text{س}+٣)} = \frac{\text{س}(\text{س}^٢+١)}{(\text{س}^٢+١)(\text{س}+٣)} = \frac{\text{س}}{\text{س}+٣}$$

مجال ن(س) = ح − { −٣ }

∵ مجال د(س) = مجال ن(س)

∵ د(س) بعد الاختزال = ن(س) بعد الاختزال لكل س ∈ المجال المشترك

∴ د(س) = ن(س)

مثال ٤

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢-\text{س}}{\text{س}^٣-\text{٢س}^٢}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢-\text{٣س}+٢}{\text{س}^٣-\text{٤س}^٢+\text{٤س}}$ **فهل** د(س) = ن(س) ؟

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-\text{س}}{\text{س}^٣-\text{٢س}^٢} = \frac{\text{س}(\text{س}-١)}{\text{س}^٢(\text{س}-٢)} = \frac{\text{س}-١}{\text{س}(\text{س}-٢)}$$

مجال د(س) = ح − { ٠ ، ٢ }

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-\text{٣س}+٢}{\text{س}^٣-\text{٤س}^٢+\text{٤س}} = \frac{(\text{س}-١)(\text{س}-٢)}{\text{س}(\text{س}-٢)(\text{س}-٢)} = \frac{\text{س}-١}{\text{س}(\text{س}-٢)}$$

مجال ن(س) = ح − { ٠ ، ٢ }

∵ مجال د(س) = مجال ن(س)

∵ د(س) بعد الاختزال = ن(س) بعد الاختزال لكل س ∈ المجال المشترك

∴ د(س) = ن(س)

مثال ٥

اثبت أن $\text{د}(\text{س}) = \text{ن}(\text{س})$ فى المجال المشترك و أوجد هذا المجال

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س}^2 - 7\text{س} + 10}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{3\text{س} - 15}{3\text{س}^2 - 21\text{س} + 30}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س}^2 - 7\text{س} + 10} = \frac{\text{س}(\text{س} - 5)}{(\text{س} - 5)(\text{س} - 2)} = \frac{\text{س}}{(\text{س} - 2)}$ مجال $\text{د}(\text{س}) = \text{ح} - \{5 ، 2\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{3\text{س} - 15}{3\text{س}^2 - 21\text{س} + 30} = \frac{3(\text{س} - 5)}{3(\text{س}^2 - 7\text{س} + 10)} = \frac{3(\text{س} - 5)}{3(\text{س} - 5)(\text{س} - 2)}$

$= \frac{1}{\text{س} - 2}$ مجال $\text{ن}(\text{س}) = \text{ح} - \{5 ، 2\}$

$\because$ مجال $\text{د}(\text{س})$ = مجال $\text{ن}(\text{س})$

$\because$ $\text{د}(\text{س})$ بعد الاختزال $\neq$ $\text{ن}(\text{س})$ بعد الاختزال لكل س $\in$ المجال المشترك

$\therefore$ $\text{د}(\text{س}) \neq \text{ن}(\text{س})$ المجال المشترك = $\text{ح} - \{5 ، 2\}$

مثال ٦

اثبت أن $\text{د}(\text{س}) = \text{ن}(\text{س})$ فى المجال المشترك و أوجد هذا المجال

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 15}{\text{س}^2 - 6\text{س} + 5}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2} = \frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 2)(\text{س} - 1)} = \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 1}$ مجال $\text{د}(\text{س}) = \text{ح} - \{2 ، 1\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 15}{\text{س}^2 - 6\text{س} + 5} = \frac{(\text{س} - 5)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 5)(\text{س} - 1)} = \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 1}$ مجال $\text{ن}(\text{س}) = \text{ح} - \{5 ، 1\}$

$\because$ مجال $\text{د}(\text{س}) \neq$ مجال $\text{ن}(\text{س})$

$\because$ $\text{د}(\text{س})$ بعد الاختزال = $\text{ن}(\text{س})$ بعد الاختزال لكل س $\in$ المجال المشترك

$\therefore$ $\text{د}(\text{س}) \neq \text{ن}(\text{س})$

المجال المشترك = $\text{ح} - \{5 ، 2\}$

مثال ٧

هل الكسران $د(س) = \frac{١}{س-٥}$ ، $ن(س) = \frac{س}{س^{٢}-٥س}$ **متساويان ، ولماذا**

$د(س) = \frac{١}{س-٥}$ مجال $ن(س) = ح - \{٥\}$

$ن(س) = \frac{س}{س^{٢}-٥س} = \frac{س}{س(س-٥)} = \frac{١}{س-٥}$

مجال $ن(س) = ح - \{٥ ، ٠\}$

∵ مجال $د(س) \neq$ مجال $ن(س)$

∵ $د(س)$ بعد الاختزال = $ن(س)$ بعد الاختزال لكل $س \in$ المجال المشترك

∴ $د(س) \neq ن(س)$

ا المجال المشترك = $ح - \{٥ ، ٠\}$

مثال ٨

هل الكسران $د(س) = \frac{٤س^{٢}-٩}{٦س-٩}$ ، $ن(س) = \frac{٢س^{٢}+٣س}{٣س}$ **متساويان ، ولماذا**

$د(س) = \frac{٤س^{٢}-٩}{٦س-٩} = \frac{(٢س-٣)(٢س+٣)}{٣(٢س-٣)} = \frac{٢س+٣}{٣}$ مجال $ن(س) = ح - \{\frac{٣}{٢}\}$

$ن(س) = \frac{٢س^{٢}+٣س}{٣س} = \frac{س(٢س+٣)}{٣س} = \frac{٢س+٣}{٣}$

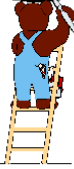
مجال $ن(س) = ح - \{٠\}$

∵ مجال $د(س) \neq$ مجال $ن(س)$

∵ $د(س)$ بعد الاختزال = $ن(س)$ بعد الاختزال لكل $س \in$ المجال المشترك

∴ $د(س) \neq ن(س)$

ا المجال المشترك = $ح - \{\frac{٣}{٢} ، ٠\}$



تمارين [٤] على تساوى دالتين

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ الدالتين ن_1 ، ن_2 متساويتان إذا كان $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^3 + \text{س}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^2 + 1}$

فان ن_1 ، ن_2 لكل س ∈ ....

(١) ح (٢) ح − { ١ } (٣) ح − { ٠ ، ١ } (٤) ح − { ٠ }

❷ إذا كانت $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^4 - \text{س}^2}{\text{س}^3 - \text{س}^2}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - \text{س}}{\text{س}^2 - \text{س}}$ دالتان متساويتان لكل س ∈ ....

(١) ح (٢) ح − { ٠ } (٣) ح − { ١ ، ٠ } (٤) ح − { ٠ ، ١ ، −١ }

❸ إذا كانت $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{3\text{س} - 6}{12}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 4}{4(\text{س} + 2)}$ فان المجال المشترك الذى

تتساوى الدالتين هو .....

(١) ح (٢) ح − { ١٢ } (٣) ح − { ٢ } (٤) ح − { −٢ }

❹ إذا كان : $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{5}{\text{س} - 8}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س} - 3}{3\text{س} - \text{ص}}$ وكان مجال ن_1 = مجال ن_2 فان ص = ...

(١) ٣ (٢) ٥ (٣) ٨ (٤) ٢٤

❺ إذا كان : $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{5\text{س}}{5\text{س} + 10}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{3\text{س} + \text{هـ}}$ متساويان فان هـ = ...

(١) ٣ (٢) ٦ (٣) ٤ (٤) صفر

❻ إذا كانت : $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{4\text{س}^2 - 9}{6\text{س} - 9}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{2\text{س}^2 + 3\text{س}}{3\text{س}}$ دالتان متساويتان فان المجال المشترك ....

(١) ح (٢) ح − $\{\frac{3}{2}\}$ (٣) ح − { ٣ } (٤) ح − $\{\text{صفر} ، \frac{3}{2}\}$



[٢] اجب عما يأتي :

❶ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{1}{س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + 1}{س^2 + س}$ هل $ن_1 = ن_2$ مع ذكر السبب

❷ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{3س}{3س + 12}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + 4س}{س^2 + 8س + 16}$ هل $ن_1 = ن_2$ مع ذكر السبب

❸ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{1}{س - 5}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س^2 - 5س}$ هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

❹ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س^2 + 9س + 20}{س^2 - 16}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + 5س}{س^2 - 4س}$

هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب وحدد المجال الذى تتساوي فيه الدالتان .

❺ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س^2 - 4}{س^2 + س - 6}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 - س^2 - 6س}{س^3 - 9س}$

هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

❻ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س^2 - 4}{س^2 + 5س + 6}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س^2 - 5س}$

هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

❼ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س - 1}{س^2 - 4س + 3}$ ، $ن_2(س) = \frac{س - 2}{2س - 5س + 6}$

هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

❽ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{(س + 1)(س^2 + 1)}{س^3 + س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 + 1}{س^3 - س^2 + س}$

هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

❾ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س}{س^2 - 1}$ ، $ن_2(س) = \frac{5س}{5س^2 - 5}$ هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

❿ إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س^2 + 1}{س^3 + س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س^2 - 5س}$ هل $ن_1(س) = ن_2(س)$ مع ذكر السبب

جمع وطرح الكسور الجبرية

مثال ١

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{١}{س + ١} + \frac{س}{س + ١}$

$د(س) = \frac{١}{س + ١} + \frac{س}{س + ١} = \frac{١ + س}{س + ١} = ١$ المجال = ح − { −١ }

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س^٢ + ٤س}{س + ٣} - \frac{س}{س + ٣}$

$د(س) = \frac{س^٢ + ٤س}{س + ٣} - \frac{س}{س + ٣} = \frac{س^٢ + ٤س - س}{س + ٣} = \frac{س^٢ + ٣س}{س + ٣} = \frac{س(س + ٣)}{س + ٣} = س$

المجال = ح − { −٣ }

مثال ٣

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{٢٥}{س + ٥} - \frac{س^٢}{س + ٥}$

$د(س) = \frac{٢٥}{س + ٥} - \frac{س^٢}{س + ٥} = \frac{٢٥ - س^٢}{س + ٥} = \frac{(٥ - س)(٥ + س)}{س + ٥} = ٥ - س$

المجال = ح − { −٥ }

مثال ٤

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س}{س - ١} - \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$

$د(س) = \frac{س}{س - ١} - \frac{س + ١}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{س}{س - ١} - \frac{١}{س - ١} = \frac{س - ١}{س - ١} = ١$

المجال = ح − { ١ ، −١ }

مثال ٥

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \frac{2\text{س}-8}{\text{س}^2-7\text{س}+12} + \frac{\text{س}+2}{\text{س}^2+4\text{س}+4}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{2(\text{س}-4)}{(\text{س}-4)(\text{س}-3)} + \frac{\text{س}+2}{(\text{س}+2)^2} = \frac{2}{\text{س}-3} + \frac{1}{\text{س}+2} = \frac{2(\text{س}+2)+\text{س}-3}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)} =$$

$$\frac{2\text{س}+4+\text{س}-3}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)} = \frac{3\text{س}+1}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)}$$

∴ المجال = ح − {٤ ، −٢ ، ٣}

مثال ٦

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \frac{2\text{س}-10}{\text{س}^2-6\text{س}+5} + \frac{6\text{س}}{\text{س}^3-5\text{س}^2+4\text{س}}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{2(\text{س}-5)}{(\text{س}-5)(\text{س}-1)} + \frac{6\text{س}}{\text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-4)} = \frac{2}{\text{س}-1} + \frac{6}{(\text{س}-1)(\text{س}-4)} = \frac{2(\text{س}-4)+6}{(\text{س}-1)(\text{س}-4)}$$

$$= \frac{2\text{س}-8+6}{(\text{س}-1)(\text{س}-4)} = \frac{2\text{س}-2}{(\text{س}-1)(\text{س}-4)} = \frac{2(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)(\text{س}-4)} = \frac{2}{\text{س}-4}$$

المجال = ح − {٤ ، ١ ، ٥ ، صفر}

مثال ٧

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \frac{3\text{س}-6}{\text{س}^2-\text{س}-2} + \frac{\text{س}^2+\text{س}-6}{\text{س}^2+4\text{س}+3}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{3\text{س}-6}{\text{س}^2-\text{س}-2} + \frac{\text{س}^2+\text{س}-6}{\text{س}^2+4\text{س}+3} = \frac{3(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+1)} + \frac{(\text{س}+3)(\text{س}-2)}{(\text{س}+3)(\text{س}+1)}$$

$$= \frac{3}{\text{س}+1} + \frac{\text{س}-2}{\text{س}+1} = \frac{3+\text{س}-2}{\text{س}+1} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}+1} = 1$$

∴ المجال = ح − {٢ ، −١ ، −٣}

مثال ٨

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = ١ + \frac{١}{س}$

$$د(س) = ١ + \frac{١}{س} = \frac{س + ١}{س}$$

المجال = $ح - \{٠\}$

مثال ٩

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = س + \frac{١}{س}$

$$د(س) = س + \frac{١}{س} = \frac{س^٢ + ١}{س}$$

المجال = $ح - \{٠\}$

مثال ١٠

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{٢}{س^٢ + ٦س + ٥} + \frac{٦}{٢س^٢ - ٨س - ١٠}$

$$د(س) = \frac{٢}{(س + ١)(س + ٥)} + \frac{٦}{٢(س^٢ - ٤س - ٥)} = \frac{٢}{(س + ١)(س + ٥)} + \frac{٣}{(س + ١)(س - ٥)}$$

$$= \frac{٢(س - ٥) + ٣(س + ٥)}{(س + ١)(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{٢س - ١٠ + ٣س + ١٥}{(س + ١)(س - ٥)(س + ٥)}$$

$$= \frac{٥س + ٥}{(س + ١)(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{٥(س + ١)}{(س + ١)(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{٥}{س^٢ - ٢٥}$$

المجال = $ح - \{-١، ٥، -٥\}$

مثال ١١

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}^2 + 4\text{س} + 3} + \frac{4\text{س}}{\text{س}^3 - 2\text{س}^2 - 3\text{س}}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{2}{(\text{س}+3)(\text{س}+1)} + \frac{4\text{س}}{\text{س}(\text{س}-3)(\text{س}+1)} = \frac{2(\text{س}-3) + 4(\text{س}+3)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)(\text{س}+1)}$$

$$= \frac{6\text{س}+6}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)(\text{س}+3)(\text{س}+1)} = \frac{6(\text{س}+1)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)(\text{س}+1)} = \frac{6}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)} = \frac{6}{\text{س}^2-9}$$

المجال = ح − {−١ ، ٣ ، −٣ ، صفر}

مثال ١٢

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س}}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1} + \frac{2}{1-\text{س}^2}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+1)}{(\text{س}+1)^2} - \frac{2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{س}}{\text{س}+1} - \frac{2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س}-1)-2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{س}^2-\text{س}-2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{(\text{س}+1)(\text{س}-2)}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{س}-2}{\text{س}-1}$$

المجال = ح − {−١ ، ١}

مثال ١٣

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}+4}{\text{س}^2+\text{س}-12} + \frac{1}{5\text{س}-6-\text{س}^2}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}+4}{(\text{س}+4)(\text{س}-3)} - \frac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)} = \frac{1}{\text{س}-3} - \frac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)}$$

$$= \frac{\text{س}-2-1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)} = \frac{\text{س}-3}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)} = \frac{1}{\text{س}-2}$$

المجال = ح − {−٤ ، ٣ ، ٢}

تمارين (٥) على جمع الكسور

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ مجال الكسر الجبرى ن (س) = $\frac{٤}{س - ١} + \frac{٢}{س + ٣}$ هو ....

(١) ح − { −٣ } (٢) ح − { ١ } (٣) ح − { −١ ، ٣ } (٤) ح − { ١ ، −٣ }

❷ إذا كان : ن$_{١}$ (س) = $\frac{٢س}{س + ١}$ ، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{٢}{س + ١}$ فان ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ = ...

(١) $\frac{٤}{س - ١}$ (٢) $\frac{٤س}{(س + ١)^{٢}}$ (٣) $\frac{٢}{س + ١}$ (٤) ٢

❸ إذا كان د (س) = $\frac{٢س - ٤}{س^{٢} - ٤} + \frac{٦س - ٦}{س^{٢} + س - ٢}$ فان د(س) فى أبسط صورة هى ....

(١) $\frac{-٨}{س + ٢}$ (٢) $\frac{٨س - ١٠}{(س + ٢)^{٢}}$ (٣) $\frac{٨}{س + ٢}$ (٤) ٨

❹ الكسر الجبرى ن (س) = $\frac{٥س}{س + ٢} + \frac{١٠}{س + ٢}$ فى أبسط صورة هو ....

(١) ١٠ (٢) ٥ (٣) $\frac{١٥س}{س - ٢}$ (٤) $\frac{-٥س}{س - ٢}$

❺ إذا كان : ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٩}{س^{٣} + ٢٧} + \frac{٣س - ٦}{س^{٢} + س - ٦}$ فان مجال ن (س) = ...

(١) ح (٢) ح − { −٣ ، ٢ } (٣) ح − { ٣ ، −٢ } (٤) ح − { ٦ }

❻ إذا كان : ن (س) = $\frac{١}{س - ١} + \frac{١}{س + ١}$ فان مجال ن (س) = ...

(١) ح (٢) ح − { −١ ، ١ } (٣) ح − { ١ } (٤) ح − { صفر }

(٢) اكمل ما يأتي :

١ المحايد الجمعي لأى كسر جبرى هو ....

٢ إذا كان : $ن(س) = \frac{٢}{س - ١}$ ، $د(س) = \frac{٣}{س + ١}$ فإن مجال (ن − د) هو ....

٣ إذا كانت : دالة مجالها ح − {٦} فإن مجال معكوسها الجمعي هو ....

٤ المعكوس الجمعي للكسر الجبرى : $\frac{٢ - س}{س^٢ - ٢}$ هو $\frac{.............}{س^٢ - ٢}$

٥ المعكوس الجمعي للدالة د : $د(س) = \frac{س - ٣}{س - ٥}$ هو $\frac{٣ - س}{.............}$

٦ $ن(س) = \frac{س}{س - ١} + \frac{١}{١ - س} = ...$ حيث $س \neq ١$

٧ $ن(س) = \frac{س^٢}{س + ٢} - \frac{٤}{س + ٢} = ...$ فى أبسط صورة $س \neq -٢$

(٢) ضع الكسر الجبرى فى ابسط صورة مبينا المجال

١ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س} + \frac{٣ + س}{٢س}$

٢ $ن(س) = \frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

٣ $ن(س) = \frac{٢}{س + ٣} + \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س}$

٤ $ن(س) = \frac{٥}{س - ٣} + \frac{٤}{٣ - س}$

٥ $ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$

٦ $ن(س) = \frac{٣}{س + ١} + \frac{٢س + ١}{١ - س^٢}$

٧ $ن(س) = \frac{١٢}{١٢س^٢ - ٣} + \frac{٢}{٢س - ٤س^٢}$

٨ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^٢ + س - ٦}$

٩ $ن(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س} + \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$

١٠ $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩} + \frac{س + ١}{س^٢ - ٢س - ٣}$



⓫ $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١} + \frac{س - ٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$

⓬ $ن(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤} + \frac{٣س}{س^٢ - ٢س}$

⓭ $ن(س) = \frac{٦س}{س^٢ + س - ٢} + \frac{٢س^٢ - ٤س}{س^٢ - ٤}$

⓮ $ن(س) = \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٨س + ١٥} + \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩}$

⓯ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} + \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٤}$

⓰ $ن(س) = \frac{-٣س - ٩}{س^٢ + ٤س + ٣} + \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - س - ٢}$

⓱ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٤س + ٤} + \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٧س + ١٠}$

⓲ $ن(س) = \frac{س - ٦}{٢س^٢ - ١٥س + ١٨} + \frac{س - ٥}{١٥ - ١٣س + ٢س^٢}$

⓳ $ن(س) = \frac{س - ٧}{س^٢ - ٧س + ١٢} + \frac{س - ٥}{س - ٤}$

⓴ $ن(س) = \frac{٣س - ٦}{س^٢ - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^٢ + ٥س + ٦}$ ثم أوجد ن(٠) ، ن(−١)

[٦] ضع الكسر الجبرى فى أبسط صورة مبينا المجال

❶ $ن(س) = \frac{١}{س - ١} - \frac{٢}{س^٢ - ١}$

❷ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٢} - \frac{١}{١ - س}$

❸ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ - ٩} - \frac{٢س + ٢}{س^٢ - ٢س - ٣}$

❹ $ن(س) = \frac{٤}{س^٢ - ٤} - \frac{٢}{س^٢ + ٢س}$

❺ $ن(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩} - \frac{٢س + ٢}{س^٢ - ٢س - ٣}$

❻ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س} - \frac{س}{س - ٢}$

❼ $ن(س) = \frac{س}{س - ١} - \frac{س + ١}{س^٢ + س - ٢}$

❽ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٢} - \frac{١}{س - ١}$

❾ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س - ٣} - \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س^٣ - ٢٧}$

❿ $ن(س) = \frac{س + ٤}{س} - \frac{س}{س - ٤}$

⓫ $ن(س) = \frac{٣س}{س^٢ - ٢س} - \frac{١٢}{س^٢ - ٤}$

⓬ $ن(س) = \frac{٥س + ٢٥}{س^٢ - ٢٥} - \frac{س}{س - ٥}$

تمارين على ضرب الكسور الجبرية

مثال ١

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ + ٥\text{س}}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦} \times \dfrac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}{٢٥ - \text{س}^٢}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} + ٥)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{-(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)} = \frac{-\text{س}}{(\text{س} + ٣)}$$

المجال = ح − {−٣ ، ٥ ، −٥ ، ٢}

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}^٢ + ٢\text{س}} \times \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{١ - \text{س}^٢}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} + ٢)} \times \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{-(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} = \frac{-(\text{س} - ٢)}{\text{س} + ١}$$

المجال = ح − {−٢ ، ٠ ، ١ ، −١}

قسمة لكسور الجبرية

مثال ٣

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥} \div \dfrac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١)} \div \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١)} \times \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)} = \frac{١}{\text{س} + ١}$$

المجال = ح − {−١ ، ٥ ، ٢}

مثال ٤

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{٣س - ١٥}{٤س + ٣} \div \frac{٥س - ٢٥}{٤س + ١٢}$

$د(س) = \frac{٣(س - ٥)}{٤س + ٣} \div \frac{٥(س - ٥)}{٤(س + ٣)} = \frac{٣(س - ٥)}{٤س + ٣} \times \frac{٤(س + ٣)}{٥(س - ٥)} = \frac{١٢(س + ٣)}{٤س + ٣}$

المجال = $ح - \{-٣ ، ٥ ، \frac{-٣}{٤}\}$

مثال ٥

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ١} \div \frac{س^٢ - ٥س}{س^٢ - ٤س - ٥}$

$د(س) = \frac{س - ١}{(س - ١)(س + ١)} \div \frac{س(س - ٥)}{(س + ١)(س - ٥)}$

$= \frac{س - ١}{(س - ١)(س + ١)} \times \frac{(س + ١)(س - ٥)}{س(س - ٥)} = \frac{١}{س}$

المجال = $ح - \{١ ، -١ ، ٥ ، ٠\}$

مثال ٦

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س^٢ - ٩} \div \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

$د(س) = \frac{(س - ١)(س + ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)} \div \frac{(س + ١)(س - ١)}{س + ١}$

$= \frac{(س - ١)(س + ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)} \times \frac{س + ١}{(س + ١)(س - ١)} = \frac{١}{س - ٣}$

المجال = $ح - \{-٣ ، ٣ ، ١ ، -١\}$

مثال ٧

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \dfrac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$

$$\text{د(س)} = \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \div \frac{٢(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٣)^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{٢(\text{س} - ٥)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$

المجال = ح − {−٣ ، ٣ ، ٥}

مثال ٨

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - ١} \div \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}$

$$\text{د(س)} = \frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)} \div \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} = \frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)} \times$$

$$\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س} - ١} = ١$$

المجال = ح − {١}

مثال ٩

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٣٦}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س}} \div \dfrac{٤\text{س} + ٢٤}{٣٦ - \text{س}^{٢}}$

$$\text{د(س)} = \frac{(\text{س} - ٦)^{٢}}{\text{س}(\text{س} - ٦)} \div \frac{٤(\text{س} + ٦)}{-(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٦)}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٦)^{٢}}{\text{س}(\text{س} - ٦)} \times \frac{-(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٦)}{٤(\text{س} + ٦)} = \frac{-١}{٤}$$

المجال = ح − {٠ ، ٦ ، −٦}

مثال ١٠

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س^{2} + س - ٦}{س^{2} + ٥س + ٦} \div \frac{س^{3} - ٢س^{2} + س - ٢}{س^{3} + ٢س^{2} + س + ٢}$

$د(س) = \frac{(س-٢)(س+٣)}{(س+٣)(س+٢)} \div \frac{س^{2}(س-٢) + (س-٢)}{س^{2}(س+٢) + (س+٢)}$

$= \frac{(س-٢)(س+٣)}{(س+٣)(س+٢)} \div \frac{(س^{2}+١)(س-٢)}{(س^{2}+١)(س+٢)} = \frac{(س-٢)(س+٣)}{(س+٣)(س+٢)} \times \frac{(س^{2}+١)(س+٢)}{(س^{2}+١)(س-٢)} = ١$

المجال = $ح - \{-٣ ، -٢ ، ٢\}$

مثال ١١

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س^{2} - س - ٢}{١ - س^{2}} \div \frac{٣س - ١٥}{س^{2} - ٦س + ٥}$

$د(س) = \frac{(س-٢)(س+١)}{-(س+١)(س-١)} \div \frac{٣(س-٥)}{(س-٥)(س-١)}$

$= \frac{(س-٢)(س+١)}{-(س+١)(س-١)} \times \frac{(س-٥)(س-١)}{٣(س-٥)} = \frac{-(س-٢)}{٣}$ المجال = $ح - \{-١ ، ١ ، ٥\}$

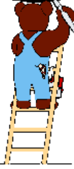
مثال ١٢

اختصر لأبسط صورة مبينا المجال $د(س) = \frac{س^{2} - ٩}{٢س^{2} + ٣س} \div \frac{٣س^{2} + ٦س - ٤٥}{٤س^{2} - ٩}$

$د(س) = \frac{(س-٣)(س+٣)}{س(٢س+٣)} \div \frac{٣(س^{2}+٢س-١٥)}{(٢س+٣)(٢س-٣)} = \frac{(س-٣)(س+٣)}{س(٢س+٣)} \div \frac{٣(س+٥)(س-٣)}{(٢س+٣)(٢س-٣)} =$

$\frac{(س-٣)(س+٣)}{س(٢س+٣)} \times \frac{(٢س+٣)(٢س-٣)}{٣(س+٥)(س-٣)} = \frac{(س+٣)(٢س-٣)}{٣س(س+٥)}$

المجال = $ح - \{٠ ، \frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، -٥ ، ٣\}$



دالة المعكوس الضربى

مجال المعكوس الضربى = ح − { أصفار البسط والمقام }

مثال ١

أوجد المجال الذى فيه يكون للكسر الجبرى $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}{٢\text{س} + ٤}$ **معكوس ضربى**

و أوجد هذا المعكوس فى أبسط صورة

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}{٢\text{س} + ٤} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{٢(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{٢}$$

$$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}(\text{س} + ٢)}$$

مجال دالة المعكوس الضربى $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \text{ح} - \{٠ ، ٢ ، -٢\}$

مثال ٢

أوجد المجال الذى فيه يكون للكسر الجبرى $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}{٤ - \text{س}^{٢}}$ **معكوس ضربى و أوجد هذا المعكوس فى أبسط صورة**

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}{٤ - \text{س}^{٢}} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{(٢ - \text{س})(٢ + \text{س})} = \frac{\text{س} - ١}{-(٢ + \text{س})}$$

$$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{-(\text{س} + ٢)}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س} + ٢}{١ - \text{س}}$$

مجال دالة المعكوس الضربى $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \text{ح} - \{١ ، ٢ ، -٢\}$

مثال ٣

أوجد المجال الذى فيه يكون للكسر الجبرى $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} + \frac{٢}{\text{س} - ٢}$ **معكوس ضربى**

و أوجد هذا المعكوس فى أبسط صورة

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} + \frac{٢}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}$$

$$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$$

مجال دالة المعكوس الضربى $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \text{ح} - \{٢ ، -٢\}$

مثال ٤

$د(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٣ - ٢س^٢ + س - ٢}$ **أوجد** $د^{-١}(س)$ **وعين مجال** $د^{-١}(س)$ ، **اذا كان** $د^{-١}(س) = ٢$ **احسب قيمة س**

$د(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٣ - ٢س^٢ + س - ٢} = \frac{س(س - ٢)}{س^٢(س - ٢) + س - ٢} = \frac{س(س - ٢)}{(س - ٢)(س^٢ + ١)} = \frac{س}{س^٢ + ١}$

$د^{-١}(س) = \frac{س^٢ + ١}{س}$ مجال دالة المعكوس الضربى $د^{-١}(س) = ح - \{٠ ، ٢\}$

اذا كان $د^{-١}(س) = ٢$ $\frac{س^٢ + ١}{س} = ٢$ $س^٢ + ١ = ٢س$

$س^٢ - ٢س + ١ = ٠$ $(س - ١)^٢ = ٠$ $س = ١$

مثال ٥

اذا كان $د(س) = س + \frac{١}{س^٢}$ **أوجد** $د^{-١}(س)$ **وعين مجال** $د^{-١}(س)$

$د(س) = س + \frac{١}{س^٢} = \frac{س^٣ + ١}{س^٢}$ $د^{-١}(س) = \frac{س^٢}{س^٣ + ١} = \frac{س^٢}{(س + ١)(س^٢ - س + ١)}$

مجال دالة المعكوس الضربى $د^{-١}(س) = ح - \{٠ ، -١\}$

مثال ٦

إذا كان $د(س) = \frac{س - أ}{س + ٢}$ **هو المعكوس الضربى للكسر** $\frac{س + ٢}{س + ٣}$ **احسب قيمة أ**

$د(س) = \frac{س - أ}{س + ٢}$ هو المعكوس الضربى للكسر $\frac{س + ٢}{س + ٣}$

$د(س) = \frac{س - أ}{س + ٢} = \frac{س + ٣}{س + ٢}$ $س - أ = س + ٣$

$-أ = ٣$ $أ = -٣$

مثال ٧

اذا كان $د(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٣س - ١٠}$ **ثم احسب قيمة** $د^{-١}(١)$ ، $د^{-١}(٢)$

أوجد $د^{-١}(س)$ **وعين مجال** $د^{-١}(س)$ ، **اذا كان** $د^{-١}(س) = ٥$ **احسب قيمة** س

$$د(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٣س - ١٠} = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٥)} = \frac{س + ٢}{س + ٥}$$

$د^{-١}(س) = \frac{س + ٥}{س + ٢}$ $د^{-١}(١) = \frac{١ + ٥}{١ + ٢} = \frac{٦}{٣} = ٢$ $د^{-١}(٢) =$ غير معرف

مجال دالة المعكوس الضربى $د^{-١}(س) = ح - \{-٥ ، ٢ ، -٢\}$

اذا كان $د^{-١}(س) = ٥$ $\therefore \frac{س + ٥}{س + ٢} = ٥$ $\therefore ٥س + ١٠ = س + ٥$

$\therefore ٤س = -٥$ $\therefore س = \frac{-٥}{٤}$

مثال ٨

إذا كان المعكوس الضربى للكسر $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢س - ب}$ **هو** $\frac{س - ٤}{س}$

فما قيمة ب **ثم أوجد مجال الكسر الذى يحقق ذلك**

المعكوس الضربى للكسر $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢س - ب}$ هو $\frac{س - ٤}{س}$

$\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢س - ب} = \frac{س}{س - ٤}$ بضرب الطرف الأيسر × $\frac{س + ٢}{س + ٢}$

$$\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢س - ب} = \frac{س}{س - ٤} \times \frac{س + ٢}{س + ٢} = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢س - ٨} = \frac{س(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ٤)}$$

بالمقارنة $-ب = -٨$ $ب = ٨$

مجال دالة المعكوس الضربى $ن^{-١}(س) = ح - \{٠ ، ٤ ، -٢\}$



تمارين [٦] على ضرب الكسور الجبرية

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = ...$

(١) $\frac{أجـ}{ب^٢}$ (٢) $\frac{أجـ}{بد}$ (٣) $\frac{أ - جـ}{٢ب}$ (٤) $\frac{أ + جـ}{٢ب}$

❷ $\frac{س}{س^٢} \times \frac{س^٣}{س^٢} = ...$ حيث $س \in ح - \{ ٠ \}$

(١) $\frac{س}{س^٤}$ (٢) $\frac{١}{س}$ (٣) ١ (٤) غير ذلك

❸ $\frac{س - ٢}{س} \times \frac{س^٢}{٢ - س} = ...$ حيث $س \in ح - \{ ٠ ، ٢ \}$

(١) س (٢) $- س$ (٣) $\frac{١}{س}$ (٤) $\frac{-١}{س}$

❹ $ن (س) = \frac{٢}{س - ١} \times \frac{٣}{س + ٢}$ فان ن (س) فى أبسط صورة ....

(١) $\frac{٦}{س^٢ - ٢}$ (٢) $\frac{٦}{٢س - ١}$ (٣) $\frac{٦}{س^٢ + س - ٢}$ (٤) $\frac{٦}{س^٢ - س - ٢}$

❺ مجال الكسر الجبرى $ن (س) = \frac{س - ٣}{س} \times \frac{س^٢}{س^٢ - ٩}$ هو ....

(١) $\{ ٠ ، ٣ ، -٣ \}$ (٢) $ح - \{ ٠ \}$ (٣) $ح - \{ ٠ ، ٩ \}$ (٤) $ح - \{ ٠ ، -٣ ، ٣ \}$

❻ مجال المعكوس الضربى للدالة $د (س) = ٣س$ هو ....

(١) ح (٢) $ح - \{ ٣ \}$ (٣) $ح - \{ ٠ \}$ (٤) $\emptyset$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



❼ ن (س) = $\frac{س + ١}{٥} \times \frac{س - ٢}{٣}$ فى أبسط صورة ....

(١) $\frac{س^٢ - ٢}{١٥}$ (٢) $\frac{س - ٣}{٨}$ (٣) $\frac{س^٢ - س - ٢}{١٥}$ (٤) $\frac{س^٢ + س - ٢}{١٥}$

❽ ن (س) = $س^٢ - ١$ فان مجال المعكوس الضربى = ...

(١) ع - { -١ ، ١ } (٢) ع - { ٠ ، -١ ، ١ } (٣) ع - { ٠ } (٤) ع - { ١ }

❾ إذا كان ن (س) = $\frac{س + ٧}{س - ٢}$ فان مجال المعكوس الضربى هو $ن^{-١}$ (س) = ...

(١) $\frac{س - ٢}{س + ٧}$ (٢) $\frac{س + ٢}{س - ٧}$ (٣) $\frac{-(س + ٧)}{س - ٢}$ (٤) غير ذلك

❿ إذا كان ن (س) = $\frac{س^٢}{س^٢ - ٣س} \times \frac{س - ٣}{س}$ فان ن (س) فى أبسط صورة هو ....

(١) $\frac{س^٢ (س - ٣)}{س^٢ - ٣س}$ (٢) ١ (٣) -١ (٤) $\frac{س^٢}{س - ٣}$

⓫ مجال المعكوس الضربى للدالة ن (س) = $\frac{٨}{س + ٤}$ هو ....

(١) ع - { -٤ } (٢) ع - { -٨ } (٣) ع (٤) غير ذلك

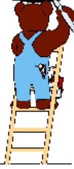
⓬ إذا كان ن (س) = $\frac{س - ٥}{س - ٢} \times \frac{س}{س - ٢}$ فان الدالة ن (س) ليس لها وجود عند س = ...

(١) ٢ (٢) -٢ (٣) ٥ (٤) صفر

⓭ إذا كان ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - ١} \times \frac{س - ١}{٥}$ فان ن (س) فى أبسط صورة هو ....

(١) ١ (٢) $\frac{١}{٥}$ (٣) $\frac{٢س}{س^٢ - ٦}$ (٤) غير ذلك

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



(٢) اكمل ما يأتى :

❶ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٣}{٧}$ فان $ن^{-١}$ (س) = ...

❷ إذا كان : ن (س) = $\frac{١}{س - ١} \times \frac{٣}{س - ١}$ فان ن (س) ليس لها وجود عند س = ...

❸ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٢س - ١٥}$ فان مجال $ن^{-١}$ (س) = ...

❹ إذا كان : ن (س) = $\frac{س + ٥}{س - ٢}$ فان مجال $ن^{-١}$ (س) = ...

❺ إذا كان : $ن_{١}$ (س) = $\frac{٣}{س}$ ، $ن_{٢}$ (س) = $\frac{س}{٣}$ فان $ن_{١}$ (س) × $ن_{٢}$ (س) = ...

❻ إذا كان : ن (س) = $\frac{ب^{٢}}{ب^{٢} + ٣ب} \times \frac{ب + ٣}{ب}$ فى أبسط صورة = ...

❼ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٥}{س + ٣}$ ، ن (س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ فان مجال $ن_{١}$ (س) × $ن_{٢}$ (س) = ...

❽ إذا كان : ن (س) =مجال المعكوس الضربى للدالة ن (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٣}$ هو....

❾ س (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢} \times \frac{س - ٢}{س}$ فى أبسط صورة = ...

❿ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{٣}{س - ١}$ هو .... ومعكوسه الضربى هو ....

⓫ مجال الكسر الجبرى $\frac{س + ١}{٣} \times \frac{س + ٤}{٥}$ هو ....

⓬ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٢}{س + ٣} \times \frac{١}{س}$ فان : مجال المعكوس الضربى للدالة ن (س) هو ....

(٣) اوجد مجال الدوال التالية واكتبها فى ابسط صورة

❶ $ن(س) = \frac{٢س + ١٠}{س^{٢} - ٢٥} \times \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{٤س + ١٢}$

❷ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - س - ٢} \times \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س}$

❸ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٣} - ٢٧} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{٥س + ٥}$

❹ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - س} \times \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} + س - ٦}$

❺ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٣} + ١} \times \frac{س^{٢} - س + ١}{س^{٢} + س - ٢}$

❻ $ن(س) = \frac{س - ٤}{س^{٣} - ٣س^{٢}} \times \frac{س - ٣}{س^{٢} - ١٦}$

❼ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٨س + ٧}{س^{٢} - ١} \times \frac{س - ١}{س^{٢} - ٤٩}$

❽ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٤س + ٤} \times \frac{س^{٣} - ٨}{٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٨س}$

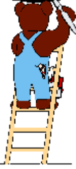
❾ $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + س - ٦} \times \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٢س + ٤}$

❿ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{٢س^{٢} + ٣س} \times \frac{٢س^{٢} + ٣س}{س^{٢} - ٤س + ٣}$

⓫ $ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - س} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + س + ١}$

⓬ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١٢س - ٣٦}{س^{٢} - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^{٢}}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



[٤] اكمل ما يأتي :

١. مجال المعكوس الضربي للكسر $\frac{٥}{س}$ هو ....

٢. مجال المعكوس الضربي للكسر $\frac{س + ١}{س - ٢}$ هو ....

٣. مجال الكسر الجبري $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٥س + ٦}$ هو .... ومجال معكوسه الضربي هو ....

٤. المعكوس الضربي للكسر ن هو $\frac{س^٢ - ٢٥}{٣ - س}$ فان المعكوس الجمعي له هو ....

٥. إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٢س + ٤}$

فان أبسط صورة للكسر الجبرى هى .... مجاله هو ....

٦. إذا كان : ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١} \div \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٣س + ٢}$

فان أبسط صورة للكسر الجبرى ن هى .... ومجاله هو ....

٧. مجال الدالة : ن (س) = $\frac{٢}{س - ٢} \div \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٤}$ هو ......

٨. إذا كان مجال ن هو ع - { -٥ ، ٢ } حيث ن (س) = $\frac{س^٢ + ٩}{(س - م)(س + ب)}$

فان (م ، ب) = (........) ، (..........)

٩. إذا كان ن (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ١} \div \frac{س^٢ - ٥س}{س^٢ - ٤س - ٥}$ فان ن (٢) = ...

١٠. مجال الدالة ن (س) = $\frac{١}{س} \div \frac{س + ٣}{س - ٢}$ هو ع -{ .... }

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

(٥) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ $\frac{س + ١}{س - ٢} \div \frac{١}{س - ٢} =$ ....

① $س + ١$ ② $\frac{١}{س + ١}$ ③ $\frac{١}{س - ١}$ ④ $س - ١$

❷ $٣س + ١٨ \div ٣ (س + ٦)$

① ١ ② $س + ٦$ ③ $س + ٣$ ④ ٣

❸ مجال الكسر الجبرى $\frac{١}{س - ١} \div \frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ح − ....

① { ١ } ② { ١ ، ٣ } ③ { ١ ، ٣ ، −٢ } ④ { ١ ، −٣ ، ٢ }

❹ مجال الكسر الجبرى $\frac{س - ٣}{س} \div \frac{س}{س + ٢}$ هو ....

① ح ② ح − { ٠ } ③ ح − { ٠ ، −٢ } ④ ح − { ٠ ، −٢ ، ٣ }

❺ الكسر الجبرى ن (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٥} \div \frac{س + ٣}{س}$ فى أبسط صورة هو ....

① ١ ② -١ ③ $\frac{س}{س - ٥}$ ④ $\frac{س}{س + ٥}$

❻ إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢}{١٢} \div \frac{٣س}{٤}$ فان ن (س) فى ابسط صورة ....

① $\frac{س}{٩}$ ② $\frac{٣س^٣}{٤٨}$ ③ $\frac{س^٣}{٩}$ ④ غير ذلك

❼ إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ + ٢س + ٤} \div \frac{٣س - ٦}{س^٣ - ٨}$ فان د (س) فى أبسط صورة هما ....

① $\frac{س - ٢}{٣}$ ② $\frac{س^٢ - ٢}{٣}$ ③ $\frac{٣س}{س - ٢}$ ④ $\frac{٣}{س - ٢}$



❽ مجال ن (س) = $\frac{٢س - ٦}{س^{٢} - ٥س + ٦} \div \frac{٣س + ٩}{س^{٢} + س - ٦}$ هو ....

(١) ع　　(٢) ع − { ٢ ، ٣ ، −٣ }　　(٣) ع − { ٢ ، ٣ }　　(٤) ع − { −٢ ، −٣ }

❾ مجال الدالة د (س) = $\frac{س + ٢}{س + ١} \div \frac{٢س}{س - ٧}$ هو ....

(١) ع　　(٢) ع − { −١ }　　(٣) ع − { −١ ، ٧ }　　(٤) ع − { −١ ، ٧ ، ٠ }

(٦) اوجد مجال الدوال التالية واكتبها فى ابسط صورة

❶ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٢س} \div \frac{٤س + ٤}{س - ٢}$

❷ ن (س) = $\frac{س - ٢}{س - ١} \div \frac{٢س}{س - ١}$

❸ ن (س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} - ٤} \div \frac{س - ٣}{٢س - ٤}$

❹ ن (س) = $\frac{س + ١}{س - ٣} \div \frac{س^{٢} + ٧س + ٦}{س^{٢} - ٩}$

❺ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢}} \div \frac{س + ٥}{س}$

❻ ن (س) = $\frac{٣س}{س - ١} \div \frac{س}{س - ١}$

❼ ن (س) = $\frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \div \frac{٥س - ٢٥}{٤س + ١٢}$

❽ ن (س) = $\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$

(٧) اوجد مجال الدوال التالية واكتبها فى ابسط صورة

❶ ن (س) = $\frac{س + ٢}{س + ١} \div \frac{٢س}{س + ١}$

❷ ن (س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} - ٤} \div \frac{س - ٣}{٢س - ٤}$

❸ ن (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢} \div \frac{س^{٢} + ٦س + ٥}{س - ٢}$

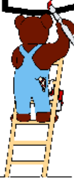
❹ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢}} \div \frac{س + ٥}{س}$

❺ ن (س) = $\frac{٥}{س^{٢} - ٢س - ٣} \div \frac{س}{س^{٢} - ١}$

❻ ن (س) = $\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٢} \div \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$

❼ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٢س - ١٥} \div \frac{س - ٣}{٢س - ١٠}$

❽ ن (س) = $\frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \div \frac{٥س - ٢٥}{٤س + ١٢}$



❾ $$ن(س) = \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + س - ٦} \div \frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س^{٢} - ٢س - ١٥}$$

❿ $$ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^{٢} - ٥س + ٦} \div \frac{٣س + ٩}{س^{٢} + س - ٦}$$

⓫ $$ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٣س + ٢} \div \frac{س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س}{٢س^{٢} + س - ٣}$$

⓬ $$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} - ١} \div \frac{س^{٢} + ٣س}{س^{٢} - س}$$

⓭ $$ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^{٢} + ٢س + ٤} \div \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - ٨}$$

⓮ $$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س^{٢} - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٦س + ٩}$$

⓯ $$ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + ٢س + ٤} \div \frac{س^{٢} + س - ٦}{س + ٣}$$

⓰ $$ن(س) = \frac{س^{٢} + ٣س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$$

⓱ $$ن(س) = \frac{٢س - ٤}{س^{٢} - ٤س - ٥} \div \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ١}$$

⓲ $$ن(س) = \left[\frac{٢س^{٢} - ٨}{س^{٢} + س - ٢} \div \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - س}\right] \times \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{٢س}$$

⓳ $$ن(س) = \left[\frac{س^{٣} - ٢س^{٢}}{س^{٣} + ١} \div \frac{س^{٢}}{س^{٢} - س + ١}\right] + \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٢س + ١}$$

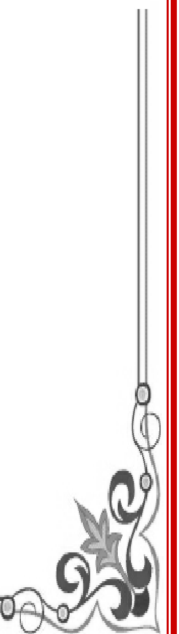
⓴ $$ن(س) = \left[\frac{٢س + ١}{س^{٢} - ٣س} \div \frac{٢}{٢س^{٢} - ٥س - ٣}\right] \div \frac{٨س^{٣} - ١}{٤س^{٣} - س}$$



الوحدة الثالثة

١ الاحتمال

٢ العمليات على الأحداث



الاحتمـالات

*التجربة العشوائية

التجربة العشوائية هي كل تجربة نستطيع أن نحدد مقدما (أي قبل إجرائها) جميع النواتج الممكنة الحدوث .ولكن لا يمكن تحديد أي من هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجراء هذه التجربة

* فضاء (فراغ) العينة أو فضاء النواتج (ف)

هو مجموع جميع النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية.

*** الحدث** هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة.

الحدث المؤكد : هو الحدث الذى لابد أن يقع ويرمز له بالرمز (ف) و يضم جميع عناصر فضاء التجربة

الحدث المستحيل: هو الحدث الذى لا يمكن أن يقع ويرمز له بالرمز($\varnothing$).

الحدث الأولى (البسيط): هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف يحتوى على عنصر واحد فقط من عناصر فضاء التجربة .

الحدثان المتنافيان : هما الحدثان اللذان يستحال وقوعهما معاً و وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر . هما حدثان لا يقعان معا (ظهور أحدهما ينفي ظهور الأخر) ويعبر عن ذلك بأن أ $\cap$ ب = $\varnothing$

مسلمات الاحتمال : إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما . فإن :

١. ل ($\varnothing$) = صفر **احتمال الحدث المستحيل** = صفر

٢. ل (ف) = ١ **احتمال الحدث المؤكد** = ١

٣. ل (أ) $\in$ [٠ ، ١] صفر < **احتمال وقوع أى حدث** < ١

٤. ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) **إذا كان** أ ، ب **حدثين متنافيين .**

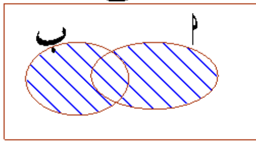
احتمال وقوع أى حدث = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء النواتج ف}}$ = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

خواص الاحتمال :

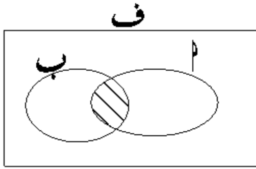
١. إذا كانت ف = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، .... ، $أ_ن$ }

فإن ل ($أ_١$) + ل ($أ_٢$) + ل ($أ_٣$) + ... + ل ($أ_ن$) = ١ أى أن مجموع الاحتمالات = ١

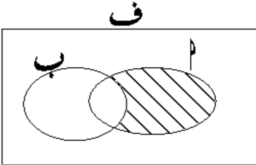
العمليات على الأحداث



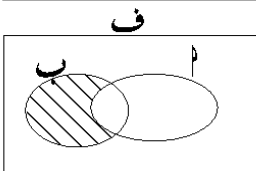
الاتحاد أ ∪ ب = وقوع أ أو ب = وقوع أحدهما على الأقل



التقاطع أ ∩ ب = وقوع الحدثين أ ، ب معا



الفرق أ − ب = حدث وقوع أ فقط = حدث وقوع أ و عدم وقوع ب



ب − أ = حدث وقوع ب فقط = حدث وقوع ب و عدم وقوع أ

التعبير اللفظى	القانون المستخدم
أ ∪ ب = وقوع الحدث أ أو الحدث ب = وقوع أحد الحدثين على الأقل = وقوع كلاهما = إصابة الهدف	ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
أ ∩ ب =وقوع الحدثين أ و ب معا	ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)
أ − ب = حدث وقوع أ فقط = حدث وقوع أ و عدم وقوع ب	ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)
ب − أ = حدث وقوع ب فقط = حدث وقوع ب و عدم وقوع أ	ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
ل(أَ) = حدث عدم وقوع أ	ل(أَ) = ١ − ل(أ) = ل(ف − أ)
ل(بَ) = حدث عدم وقوع ب	ل(بَ) = ١ − ل(ب) = ل(ف − ب)

الحالات الخاصة :

أ ، ب حدثين متنافيين	أ ⊂ ب	ب ⊂ أ
ل (أ ∩ ب) = صفر	ل (أ ∩ ب) = ل (أ)	ل (أ ∩ ب) = ل (ب)
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)	ل (أ ∪ ب) = ل (ب)	ل (أ ∪ ب) = ل (أ)
ل (أ − ب) = ل (أ)	ل (أ − ب) = صفر	ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (ب)
ل (ب − أ) = ل (ب)	ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ)	ل (ب − أ) = صفر

مثال[١]

سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠

أوجد احتمال أن البطاقة المسحوبة ❶ تحمل رقماً فرديا يقبل القسمة على ٥

❷ يقبل القسمة على ٧ ❸ تحمل رقماً فرديا يقبل القسمة على ٥ أو ٧

الحل ن(ف) = ٤٠

❶ أ = {٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥} ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٤٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

❷ ب = { ٧ ، ٢١ ، ٣٥ } ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤٠}$

❸ جـ = أ ∪ ب = {٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٧ ، ٢١} ∴ ل (جـ) = $\frac{٦}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

مثال[٢]

من مجموعة أرقام العدد ٣٢١٠ ، كون عددا مكونا من رقمين مختلفين،

أحسب احتمال أن يكون الحدث عدداً زوجياً أو رقم العشرات فردى.

الحل ف = {١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢١ ، ٣١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ١٣ ، ٢٣}

∴ أ = {١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ١٢ ، ٣٢} (**العدد الزوجى**)

∴ ب = {١٠ ، ٣٠ ، ٣١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ١٣} (**رقم العشرات فردى**)

أ ∪ ب = {١٠ ، ١٣ ، ٣٠ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٢٠ ، ٣١} ∴ ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{٩}$

Mr : Walid Rushdy 0112467874 0162220750



مثال [٣]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان : ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

احسب احتمال ❶ وقوع الحدث أ أو الحدث ب ❷ وقوع أ وعدم وقوع ب

الحل

وقوع الحدث أ أو الحدث ب = ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٩

وقوع أ وعدم وقوع ب = ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٣

مثال [٤]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة العشوائية وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,١ أوجد ل(أ ∪ ب) ، ل(أ − ب) ، ل(ب − أ)

الحل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ + ٠,٦ − ٠,١ = ٠,٧

ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ − ٠,١ = ٠,١

ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ − ٠,١ = ٠,٥

مثال [٥]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة العشوائية وكان ل(أ) = ٠,٥٥ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$ أوجد ل(أ ∩ ب) ، ل(أ − ب) ، ل(ب − أ)

الحل ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

= ٠,٥٥ + ٠,٣٠ − ٠,٦٥ = ٠,٨٥ − ٠,٦٥ = ٠,٢

ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٥٥ − ٠,٢ = ٠,٣٥

ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ − ٠,٢ = ٠,١



مثال[٦]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة العشوائية وكان ل(أ ∩ ب) = ٠,١٥ ، ل(ب) = ٠,٢٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ **أوجد** ل(أ)

الحل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∩ ب) =

٠,٩٠ = ل(أ) + ٠,٢٥ – ٠,١٥

ل(أ) = ٠,٩٠ – ٠,٢٥ + ٠,١٥ = ٠,٨

مثال[٧]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة العشوائية وكان ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ ، ل(أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$ **أوجد** ❶ **احتمال عدم وقوع الحدث أ** ❷ ل(ب)

❶ **احتمال عدم وقوع الحدث** أ = ل(أَ)

∵ ل(أ) = $\frac{١}{٦}$

∴ ل(أَ) = ١ – ل(أ) = ١ – $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∩ ب) =

∴ $\frac{١}{٦}$ + ل(ب) – $\frac{١}{١٨}$ = $\frac{٤}{٩}$

∴ ل(ب) = $\frac{٤}{٩}$ + $\frac{١}{١٨}$ – $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٦}{١٨}$ = $\frac{١}{٣}$

❷ ل(بَ) = ١ – ل(ب)

∴ ل(بَ) = ١ – $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$



✍ **مثال [٨]**

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة العشوائية وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$

أوجد : ل(أ ∪ ب) **إذا كان** ❶ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ❷ أ ، ب **حدثان متنافيان** ❸ أ ⊂ ب

❶ **إذا كانت** ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٨}$ = $\frac{١٢ + ٨ - ٣}{٢٤}$ = $\frac{١٧}{٢٤}$

❷ **إذا كانت** أ ، ب **حدثان متنافيان فان** ل(أ ∩ ب) = ٠

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) =

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ − صفر = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٥}{٦}$

❸ **إذا كانت** ب ⊂ أ

فان ل(أ ∩ ب) = ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

✍ **مثال [٩]**

إذا كان أ ،ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

ل(أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$ **أوجد :** ل(ب)

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$\frac{١}{٦}$ + ل(ب) − $\frac{١}{١٨}$ = $\frac{٤}{٩}$ ل(ب) = $\frac{٤}{٩}$ + $\frac{١}{١٨}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

✍ مثال [١٠]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة العشوائية وكان ل(ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

أوجد ل(أ) ❶ أ ، ب **حدثان متنافيان** ❷ ب ⊂ أ

الحل ❶ **إذا كانت** أ ، ب **حدثان متنافيان فان** ل(أ ∩ ب) = ٠

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) =

$\frac{١}{٣}$ = ل(أ) + $\frac{١}{١٢}$ − ٠ ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{٤-١}{١٢}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

❷ **إذا كانت** ب ⊂ أ ل(أ ∩ ب) = ل(ب)

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$\frac{١}{٣}$ = ل(أ) + $\frac{١}{١٢}$ − $\frac{١}{١٢}$ ل(أ) = $\frac{١}{٣}$

✍ مثال [١١]

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = س ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ **فأوجد قيمة س فى كل من الحالات الآتية :**

❶ أ ، ب **حدثين متنافيين** ❷ أ ⊂ ب ❸ ل(أ ∩ ب) = ٠,٤

الحل : ❶ أ ، ب **حدثين متنافيين** ل(أ ∩ ب) = صفر

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

⇐ ٠,٧ = ٠,٦ + س س = ٠,١

❷ أ ⊂ ب ل(أ ∩ ب) = ل(أ)

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ل(ب)

⇐ ٠,٧ = س

❸ ل(أ ∩ ب) = ٠,٤

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

⇐ ٠,٧ = ٠,٦ + س − ٠,٤ س + ٠,٢ = ٠,٧ س = ٠,٥

مثال [١٢]

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

$\text{ل}(أ) = \frac{١}{٦}$ ، $\text{ل}(أ \cap ب) = \frac{١}{١٨}$ ، $\text{ل}(أ \cup ب) = \frac{٤}{٩}$ أوجد: $\text{ل}(أ - ب)$ ، $\text{ل}(\bar{ب})$

$\text{ل}(أ - ب) = \text{ل}(أ) - \text{ل}(أ \cap ب)$

$= \frac{١}{٦} - \frac{١}{١٨} = \frac{٣ - ١}{١٨} = \frac{١}{٩}$

$\text{ل}(أ \cup ب) = \text{ل}(أ) + \text{ل}(ب) - \text{ل}(أ \cap ب)$

$\frac{١}{٦} + \text{ل}(ب) - \frac{١}{١٨} = \frac{٤}{٩}$

$\text{ل}(ب) = \frac{٤}{٩} + \frac{١}{١٨} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}$

$\text{ل}(\bar{ب}) = ١ - \text{ل}(ب) = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

مثال [١٣]

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة في تجربة عشوائية ،وكان $\text{ل}(أ) = ٠,٢٦$ ، $\text{ل}(ب) = ٠,٣٣$

أوجد: (١) $\text{ل}(أ \cap ب)'$ (٢) $\text{ل}(أ \cup ب)'$ (٣) $\text{ل}(أ - ب)$

الحل

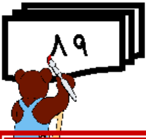
∵ **الحدثان متنافيان** $\text{ل}(أ \cap ب) = \text{صفر}$

$\text{ل}(أ \cup ب) = ٠,٢٦ + ٠,٣٣ = ٠,٥٩$

١) $\text{ل}(أ \cap ب)' = ١ - \text{ل}(أ \cap ب) = ١ - \text{صفر} = ١$

٢) $\text{ل}(أ \cup ب)' = ١ - \text{ل}(أ \cup ب) = ١ - ٠,٥٩ = ٠,٤١$

٣) $\text{ل}(أ - ب) = \text{ل}(أ) - \text{ل}(أ \cap ب) = ٠,٢٦ - \text{صفر} = ٠,٢٦$



✍ **مثال [١٤]**

إذا كان ل(أ) = ل(أَ) ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(أ − ب) = $\frac{٥}{١٢}$

أوجد كلاً من ل(أ) ، ل(أ ∪ ب)

الحل : ل(أَ) = ١ − ل(أ) ∴ ل(أ) = ١ − ل(أَ) ∵ ل(أ) = ل(أَ)

∴ ل(أَ) + ل(أ) = ١ ∴ ٢ل(أ) = ١ ∴ ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

∴ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) ∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{١}{١٢}$

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{٦ + ٤ - ١}{١٢}$ = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

✍ **مثال [١٥]**

إذا كان : أ ، ب **حدثين من أحداث تجربة عشوائية حيث** ل(ب − أ) = $\frac{٤}{١٥}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٣٠}$ ، ل(أ − ب) = ٠,٣ **فأوجد احتمال:** ❶ **حدث عدم وقوع** أ ❷ **حدث وقوع** أ أو ب أو **كليهما**

∵ ل(أ − ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٣٠}$

∴ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) ∴ ل(أ) = ل(أ − ب) + ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ) = ٠,٣ + $\frac{٧}{٣٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{٧}{٣٠}$ = $\frac{٩ + ٧}{٣٠}$ = $\frac{١٦}{٣٠}$ = $\frac{٨}{١٥}$

∴ **احتمال عدم وقوع** أ = ل(أَ) = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{٨}{١٥}$ = $\frac{٧}{١٥}$

∵ **احتمال وقوع** أ أو ب أو **كليهما** = ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{٨}{١٥}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٧}{٣٠}$ = $\frac{٤}{٥}$



✍ **مثال[١٦]**

صمم حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور كلا من العداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساو ، احتمال ظهور العدد ٦ يساوى ثلاثة أمثال احتمال العدد ١ احسب احتمال ظهور عدد زوجي

الحل

ل(١) = ل(٢) = ل(٣) = ل(٤) = ل(٥) = س ‏ ‏ ‏ ‏ ل(٦) = ٣س

ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٥) + ل(٦) = ١

س + س + س + س + س + ٣س = ١ ‏ ‏ ‏ ‏ ٨س = ١

احتمال ظهور عدد زوجي = ل(٢) = ل(٤) = ل(٦) = $\frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٥}{٨}$

✍ **مثال[١٧]**

ثلاثة أشخاص س، ص، ع يتنافسون فى سباق، فإذا كان احتمال فوز ص = ضعف احتمال فوز س، واحتمال فوز ع ثلاثة أمثال احتمال فوز س .وأن شخصاً واحداً سيفوز فى السباق،

اوجد : ❶ احتمال فوز س ❷ احتمال فوز س أو ع ❸ احتمال عدم فوز ع

الحل

نفرض احتمال فوز س = أ ‏ ‏ **احتمال فوز** ص = ٢أ ‏ ‏ **احتمال فوز** ع = ٣أ

∴ أ + ٢أ + ٣أ = ١ ‏ ‏ ∴ ٦أ = ١ ‏ ‏ ∴ أ = $\frac{١}{٦}$ ‏ ‏ ∴ ل (س) = أ = $\frac{١}{٦}$

∴ ل (س ∪ ع) = ل(س) + ل(ع) = أ + ٣أ = ٤أ = ٤ $(\frac{١}{٦})$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ل(ع′) = ١ − ل(ع) ‏ ‏ ∴ ل(ع′) = ١ − ٣أ = ١ − $(\frac{١}{٦})$ = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

✍ **مثال [١٨]**

ثلاث لاعبين أ ، ب ، جـ يتنافسون فى مسابقة لرفع الأثقال فإذا كان احتمال فوز الحدث (ب) يساوى ضعف احتمال فوز الحدث (أ) ، واحتمال فوز الحدث (جـ) = ثلاثة أمثال احتمال فوز الحدث (أ) وأن لاعب واحد فقط سيفوز فى المسابقة أوجد ❶ احتمال فوز أ أو جـ ❷ عدم فوز أ

احتمال فوز الحدث (ب) يساوى ضعف احتمال فوز الحدث (أ)

∴ ل (ب) = ٢ ل (أ)

واحتمال فوز الحدث (جـ) = ثلاثة أمثال احتمال فوز الحدث (أ)

∴ ل (جـ) = ٣ ل (أ)

∵ **شخصا واحد سيفوز** ∴ **الأحداث** أ ، ب ، جـ **متنافية مثنى مثنى**

∴ ل (أ ∪ ب ∪ جـ) = ١ ∴ ل (أ) + ل (ب) + ل (جـ) = ١

∴ ل (أ) + ٢ ل (أ) + ٣ ل (أ) = ١

∴ ٦ ل (أ) = ١ ∴ ل (أ) = $\frac{١}{٦}$

∴ ل (ب) = ٢ ل (أ) = $\frac{٢}{٦}$ ل (جـ) = ٣ ل (أ) = $\frac{٣}{٦}$

∴ **احتمال فوز** أ أو جـ = ل (أ ∪ جـ) = ل (أ) + ل (ب) = $\frac{١}{٦}$ + $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ **عدم فوز** أ = ل (أ َ) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$



✍ مثال[١٩]

في فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات ، وكان الحدثين أ ، ب حدثين من ف ، فإذا كان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ = ١٣ ، وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوى ٢٤ وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$

فأوجد احتمال وقوع الحدث أ ، احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معا

الحل عدد النواتج التى تؤدى الى وقوع الحدث أ = ١٣ ∴ ن (أ) = ١٣

وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوى ٢٤ ∴ ن (ف) = ٢٤

ل (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)}$ = $\frac{١٣}{٢٤}$

∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

∴ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معا ل (أ ∩ ب) = $\frac{١٣}{٢٤}$ + $\frac{٥}{١٢}$ − $\frac{٥}{٦}$

= $\frac{١٣ + ١٠ - ٢٠}{٢٤}$ = $\frac{٣}{٢٤}$ = $\frac{١}{٨}$

تمارين على الاحتمال

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ إذا كان : م ، ب حدثين متنافيين فان : ل (م ∩ ب) = ...

(١) صفر (٢) ٠,٥٦ (٣) ١ (٤) Ø

❷ إذا كان : م ⊂ ب فان ل (م ∩ ب) = ...

(١) صفر (٢) ل (م) (٣) ل (ب) (٤) Ø

❸ إذا كان : م ⊂ ب فان ل (م ∪ ب) = ...

(١) صفر (٢) ل (م) (٣) ل (ب) (٤) Ø

❹ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فان احتمال ظهور صورة أو كتابة = ...

(١) صفر ٪ (٢) ٢٥٪ (٣) ٥٠٪ (٤) ١٠٠٪

❺ إذا القي حجر نرد منتظم مرة واحدة فان احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردى معا يساوى ....

(١) صفر (٢) $\frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{٣}{٤}$ (٤) ١

❻ القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث م هو (ظهور عدد أولى) والحدث ب هو (ظهور عدد أولى) فان : ل (م ∩ ب) = ...

(١) $\frac{١}{٦}$ (٢) $\frac{١}{٣}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{٢}{٣}$

❼ القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فان احتمال ظهور عدد زوجي غير أولى = ...

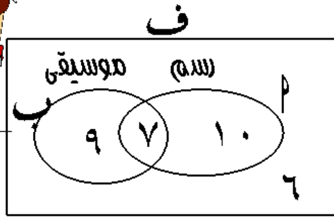
(١) $\frac{١}{٦}$ (٢) $\frac{١}{٣}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{٥}{٦}$

❽ القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث م هو (ظهور عدد أقل من ٥) والحدث ب هو (ظهور عدد فردى) فان احتمال وقوع أحدهما على الأقل هو = ...

(١) $\frac{٢}{٣}$ (٢) $\frac{١}{٣}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{٥}{٦}$



❾ فصل دراسى به ٣٢ تلميذ وبه مجموعتان من التلاميذ من هواة الرسم ، و الموسيقى أعدادهم كما بالشكل . إذا اختير تلميذ عشوائيا فما احتمال أن لا يكون من هواة الموسيقى ؟



(١) $\frac{٣}{٨}$ (٢) $\frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{٥}{٨}$ (٤) ١

❿ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فان

(١) الحدثين متنافيين (٢) أ ⊂ ب (٣) ب ⊂ أ (٤) ب = أَ

⓫ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء نواتج العين ف وكان : أ ⊂ ب ، ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٦
فان : ل (ب − أ) = ...

(١) ٠,٦ (٢) ٠,٢ (٣) ٠,٨ (٤) ٠,٤

⓬ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء نواتج العين ف وكان : ل (أ) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١
فان : ل (أ − ب) = ...

(١) ٠,١ (٢) ٠,٣ (٣) ٠,٤ (٤) ٠,٥

⓭ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء نواتج العين ف وكان : ل (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فان : ل (أ − ب) = ...

(١) $\frac{١}{٣}$ (٢) $\frac{٢}{٣}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{٥}{٦}$

⓮ أى من الآتى يعبر عن احتمال أحد الأحداث ؟

(١) −٠,٣ (٢) ٢٥٪ (٣) ١,٢ (٤) $\frac{٦}{٥}$



⓯ إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فان احتمال ظهور صورة أو كتابة =.......

(١) صفر (٢) $\frac{١}{٢}$ (٣) ٥٠٪ (٤) ١٠٠٪

⓰ إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فان احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردى معا =.......

(١) صفر (٢) $\frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{٣}{٤}$ (٤) ١

⓱ إذا كان احتمال نجاح طالب ٠,٩ فان احتمال رسوبه ....

(١) صفر (٢) $\frac{١٠}{٩}$ (٣) ٠,٩ (٤) ٠,١

⓲ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان أ هو حدث ظهور عدد أولي ، ب هو حدث ظهور عدد فردى فان ل (أ ∩ ب) =...............

(١) $\frac{١}{٦}$ (٢) $\frac{١}{٣}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{٣}{٤}$

[٢] اكمل ما يأتي

❶ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ فان : ل (ب) = ...

❷ إذا كان احتمال وقوع الحدث أ = ٣٠٪ فان احتمال عدم وقوعه = ...

❸ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ ∩ ب) = Ø فان الحدثين أ ، ب ....

❹ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ فان : ل (ب) = ...

❺ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ فان : ل (أ ∪ ب) = ...



❻ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان ب ⊂ أ : ل (ب) = $\frac{١}{٦}$

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢}$ فان : ل (أ) = ...

❼ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

فان الحدثين أ ، ب ....

❽ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = $\frac{٥}{٩}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٩}$

، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٩}$ فان : ل (أ ∪ ب) = ...

❾ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فان : ل (أ ∩ ب) = ...

❿ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$

فان : ل (أ ∪ ب) = ...

⓫ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٦

، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فان : ل (أ ∪ ب) = ...

⓬ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان أ ⊂ ب : ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فان : ل (أ) = ... ، ل (ب) = ...

⓭ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = ٠,٥٥ ، ل (ب) = ٠,٣

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$ فان : ل (أ ∩ ب) = ...

⓮ إذا كان احتمال نجاح طالب ٠,٨ فان احتمال رسوبه ....



⑮ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٥
، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣٨ فان : ل (أ ∪ ب) = ...

⑯ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$
، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ فان : ل (أ ∩ ب) = ...

⑰ إذا ألقيت عملة نقدية ١٠٠٠ فان العدد المتوقع لظهور الصورة = ...

⑱ إذا كان ل (أ) = ل (أَ) فان ل (أ) = ...

⑲ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية فان ل (أ – ب) = ل (..........)
، ل (ب – أ) = ل (..........)

⑳ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العين ف لتجربة عشوائية ، وكان أ ⊂ ب :
فان ل (ب – أ) = ل (..........) = ...

㉑ إذا كان : أ حدثا من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية فان :
أ ∪ أَ = ... أ ∩ أَ = ...
ل (أ ∪ أَ) = ... ل (أ ∩ أَ) = ...

㉒ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عين لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (أ – ب) = ٠,٥
فان : ل (أ ∩ ب) = ...

㉓ إذا اعتبرنا أن مجموعة أحرف اللغة العربية هو فضاء نواتج لتجربة عشوائية وعددهم ٢٨ حرفا وكان
س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز } ، ص = { د ، ز ، ح ، ط ، ى }
فان ل (س – صَ) = ...

✍ [٣] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية أكمل

❶ ل (أ) = ٠,٢	❷ ل (أ) = ٠,٥٥	❸ ل (أ) = ...
ل (ب) = ٠,٦	ل (ب) = ٠٣	ل (ب) = ٠,٢٥
ل (أ ∩ ب) = ٠,٣	ل (أ ∩ ب) = ...	ل (أ ∩ ب) = ٠
ل (أ ∪ ب) = ...	ل (أ ∪ ب) = ٠,٦٥	ل (أ ∪ ب) = ٠,٩



[٤] أ ، ب حدثان فضاء النواتج ، ل دالة احتمال معرفة على هذا الفضاء بحيث ل (أ) = ٠,٦٤
، ل (ب) = ٠,٣٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١٨ فاحسب : ل (أ − ب) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (ب − أ)

---

[٥] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$
، ل (ب) = $\frac{١}{٦}$ فأوجد : ❶ ل (أ) ❷ ل (أ − ب)

---

[٦] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان ل (أ َ) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$
فأوجد : ❶ ل (أ ∪ ب) ❷ ل (أ − ب) ❸ ل (أ − ب)

---

[٧] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥
، ل (أ ∩ ب) = ٠,١٢ أوجد : ❶ ل (أ َ) ❷ ل (أ ∪ ب) ❸ ل (أ − ب)

---

[٨] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل (أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل (أ) = ٠,٤
، ل (ب) = ٠,٧ أوجد كلا من : ❶ ل (أ ∩ ب) ❷ ل (أ َ) ❸ ل (أ − ب)

---

[٩] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب َ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$
فأوجد ❶ ل (ب) ، ❷ ل (أ ∪ ب)

---

[١٠] إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ،
ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{١٢}$. فأوجد : ل ❶ (أ ∪ ب) ❷ ل (أ − ب)

---

[١١] إذا كان أ ، ب حدثين ينتميان إلى فضاء العينة ف المصاحب لتجربة عشوائية ما بحيث
ل (أ) = ل (ب) فإذا علمت أن ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فأوجد :
ل ❶ (أ) ل ❷ (ب − أ) ❸ ل (ف − ب)



[١٢] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان
ل(أ) = ٠,٣٨ ، ل(ب) = ٠,٤٣ ، فأوجد : ❶ ل (أ ‾) ، ل ❷ (أ − ب)

---

[١٣] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$

فأوجد : ❶ ل (أ ∪ ب) ، ل ❷ (أ − ب)

---

[١٤] إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = ٠,٥
، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ فأوجد ل(ب) فى كل من الحالتين الآتيتين :
❶ أ ، ب متنافيين ❷ ل (أ − ب) = ٠,٣

---

[١٥] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = ٠,٥ ،
ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ فأوجد : ❶ ل(ب) ، ❷ ل(أ ∩ ب)‾ ، ❸ ل (أ − ب)

---

[١٦] إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية بحيث أ ⊂ ب وكان ل (أ) = $\frac{٢}{٥}$

ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد : ل ❶ (ب) ، ❷ ل (ب − أ) ، ❸ ل (أ − ب)

---

[١٧] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج وكان ل (أ) = س ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$
عين قيمة س في الحالات التالية : ❶ إذا كان أ ، ب متنافيين ❷ إذا كان ب ⊂ أ

---

[١٨] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

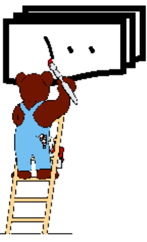
فأوجد قيمة ل (ب) في كل من الحالتين التاليتين : ❶ إذا كان أ ⊂ ب ❷ إذا كان أ ، ب متنافيين

---

[١٩] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (بَ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

فأوجد ❶ احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من الحدثين أ أو ب

❷ احتمال وقوع أحد الحدثين فقط



[٢٠] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف وكان ل (أ) = ٠,٦٣

، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨٨ فاحسب : ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)]

---

[٢١] أ ، ب حدثان في فضاء احتمالي (ف ، ل) بحيث كان ل (أ) = س ، ل (ب′) = ٠,٧٣

، ل (أ ∪ ب) = ٠,٥٢ أوجد قيمة س إذا كان ❶ ل (أ ∩ ب) = ٠,١٢ ❷ أ ، ب متنافيان

---

[٢٢] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما بحيث ل (أ) = ٠,٥

، ل (بَ) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ **فأوجد :** ل (ب) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

---

[٢٣] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما بحيث أ ⊂ ب

، ل (أ) = ٢ ل (أ′) . **فأوجد :** ل (أ ∩ ب)

---

[٢٤] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = ٠,٦ ،

ل (أ ∪ ب) = ٠,٧٥ . **فأوجد :** ل (ب) ، ل (أ − ب)

---

[٢٥] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

، ل (ب − أ) = ٠,٣ ، ل (أ − ب) = ٠,٤ **فأوجد :** كلا من : ل (ب) ، ل (أ ∪ ب)

---

[٢٦] أ ، ب حدثان من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما فإذا كان : ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

، ل (ب − أ) = ٠,٣ ، ل (أ − ب) = ٠,٤ **فأوجد :** احتمال كلا من : ❶ وقوع أ ، أ ، ب

❷ وقوع أ أو عدم وقوع ب ❸ وقوع أحدهما فقط

---

[٢٧] . إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = س ، ل (بَ) = $\frac{٣}{٤}$ ،

ل [ف − (أ ∪ ب)] = $\frac{٢}{٣}$. **فأوجد :** قيمة س فى كلا من الحالات التالية : ❶ أ ، ب متنافيين ❷ ب ⊂ أ

---

[٢٨] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = س ،

ل (أ ∪ ب)¯ = $\frac{١}{٣}$. أولا : أوجد قيمة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

❶ أ ، ب متنافيين ❷ أ ⊂ ب ❸ إذا كانت س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد قيمة ل (أ ∩ ب)



✍ [٢٩] : إذا كان ٩ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان ل (٩) = ل (٩َ) ،

ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ل (٩) فأوجد : ❶ ل (ب) ❷ ل (٩ − ب)

✍ [٣٠] ٩ ، ب حدثان في فضاء احتمالي (ف ، ل) بحيث كان احتمال حدوث ٩ = $\frac{٥}{٩}$ ، احتمال حدوث ب = $\frac{٧}{٩}$ ،

احتمال حدوث أحدهما على الأقل = $\frac{٨}{٩}$ احسب احتمال :

❶ وقوعهما معاً ❷ وقوع أحدهما فقط ❸ وقوع أحدهما على الأكثر

✍ [٣١] من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } كون عدد من رقمين مختلفين . ثم احسب

احتمال أن يكون هذا العدد : ❶ زوجي ❷ يقبل القسمة على ٥ ❸ أحد رقميه فردى والأخر زوجي

✍ [٣٢] صندوق به ٥ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٥ ، ٤ كرات بيضاء مرقمة من ٦ إلى ٩ ، سحبت كرة

عشوائيا .احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة : ❶ حمراء وتحمل رقم زوجي

❷ تحمل رقم فردى ❸ بيضاء أو تحمل عدد أولي

✍ [٣٣] صمم حجر نرد بحيث وجهان يحملان الرقم ١ ، ووجهان يحملان الرقم ٢ ، ووجهان يحملان الرقم ٣

. ألقى هذا الحجر مرتين متتاليتان ولوحظ الرقم على الوجهين العلويين . احسب احتمال أن يكون :

أولا : مجموع الرقمين = عدد فردى ثانيا : الفرق المطلق بين العددين يقبل القسمة على ٢

✍ [٣٤] من مجموعة الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كون عدد من رقمين ثم أوجد احتمال الحصول على :

❶ رقم العشرات زوجي ❷ رقم الآحاد زوجي ❸ مجموع الرقمين عدد أولي

✍ [٣٥] صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت بطاقة عشوائيا . أوجد احتمال أن تكون

البطاقة المسحوبة تحمل عدد : ❶ يقبل القسمة على ٤ ❷ يقبل القسمة على ٥

❸ لا يقبل القسمة على ٤ ، أ ، ٥

✍ [٣٦] صندوق به ٣٠ كرة مرقمة من ١ الى ٣٠ سحبت بطاقة عشوائيا أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب عليها

❶ مضاعفا للعدد ٦ ❷ مضاعفا للعدد ٨ ❸ مضاعفا للعدد ٦ ، ٨



✍ [٣٧] صندوق به ١٥ كرة منها ٥ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٥ ، ١٠ كرات سوداء مرقمة من ٦ إلى ١٥ سحبت كرة واحدة عشوائيا من هذا الصندوق . ❶ احسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

أ = حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل رقما فرديا .

ب = حدث أن تكون الكرة المسحوبة سوداء و تحمل رقما زوجيا .

❷ هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ علل إجابتك .

✍ [٣٨] صندوق به ٤ بطاقات تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وصندوق أخر به كرتان إحداهما حمراء والأخرى سوداء ، سحبت عشوائيا بطاقة من الصندوق الأول وكرة من الصندوق الثاني .

❶ أكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

❷ عين الحدث أ حيث أ هو " أن تحمل البطاقة رقم زوجي وتكون الكرة حمراء " .

❸ احسب احتمال وقوع الحدث أ .

✍ [٣٩] صندوق به ١٥ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٥ والتجربة هي سحب بطاقة عشوائياً ثم إعادتها إلى الصندوق ثم سحب بطاقة عشوائياً مرة أخرى . أحسب احتمال كل حدث مما يلي :

❶ البطاقتان تحملان عددين فرديين . ❷ بطاقة السحبة الثانية تحمل عدداً يقبل القسمة على ٤ .

❸ بطاقة السحبة الأولى تحمل عدداً زوجياً وبطاقة السحبة الثانية تحمل عدداً أولياً .

✍ [٤٠] تقف ٢٠ سيارة في جراج للسيارات ، فوجد أن ١٣ سيارة منها من ذات الأربعة أبواب ، ٨ سيارات زرقاء اللون منها ٣ سيارات من ذات الأربعة أبواب ، اختيرت إحدى السيارات بالجراج عشوائياً ، ما احتمال أن تكون هذه السيارة ❶ زرقاء اللون ❷ لها أربعة أبواب .

❸ لها أربعة أبواب وليست زرقاء ❹ ليست زرقاء وليس لها أربعة أبواب .

✍ [٤١] صيادان يصوب كل منهما بندقية نحو هدف ما ، فإذا علم أن احتمال إصابة الهدف من الأول بمفرده هو ٠,٢ ومن الثاني بمفرده ٠,٣ واحتمال أن يصاب الهدف من كل منهما ٠,٢ فما احتمال أن يصاب الهدف :

❶ من الأول ❷ من الثاني . ❸ من أحدهما على الأقل ❹ من أحدهما على الأكثر

✍ [٤٢] اشترك ثلاثة لاعبين أ ، ب ، جـ في مسابقة لرفع الأثقال ، فإذا كان احتمال فوز اللاعب أ = ثلاثة أمثال احتمال فوز ب ، واحتمال فوز اللاعب ب = ضعف احتمال فوز اللاعب جـ فأوجد احتمال اللاعب ب أو جـ علما بأن لاعبا واحدا سيفوز فى المسابقة



[٤٣] اشترك ثلاث متسابقين م ، ب ، جـ فى مسابقة لرفع الأثقال فإذا كان احتمال فوز الحدث (م) يساوى ضعف احتمال فوز الحدث (ب) ، واحتمال فوز الحدث (ب) = احتمال فوز الحدث (جـ) وأن لاعب واحد فقط سيفوز فى المسابقة أوجد احتمال فوز ب أو جـ

---

[٤٤] تسابق م ، ب ، جـ فى سباق ما ، فإذا كان احتمال فوز م بالسباق يقل عن احتمال فوز ب بمقدار $\frac{١}{٧}$ ، احتمال فوز جـ ضعف فوز م فأوجد احتمال : (١) فوز م أو ب

---

[٤٥] إذا كان احتمال نجاح طالب فى التاريخ هو ٠,٦٥ ، احتمال نجاحه فى اللغة العربية هو ٠,٥٥ ، احتمال نجاحه فى المادتين معا هو ٠,٢٥ أوجد احتمال : أولا : نجاحه فى التاريخ فقط

ثانيا : رسوبه فى المادتين معا ثالثا : نجاحه فى مادة واحدة على

[٤٦] إذا كان احتمال نجاح طالب فى التاريخ = ٠,٤ واحتمال نجاحه فى اللغة العربية = ٠,٤٥ واحتمال نجاحه فى التاريخ واللغة العربية = ٠,١٥ فأوجد احتمال : ❶ نجاحه فى التاريخ فقط ❷ رسوبه فى المادتين معا

---

[٤٧] فصل دراسي به ٤٠ طالب منهم ١٥ يدرسون هواية الموسيقى ، ١٢ يدرسون هواية الرسم ، ٥ يدرسون الهوايتين معا . اختير طالب عشوائيا . أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار دارسا :

أولا : إحدى الهوايتين على الأكثر ثانيا : هواية واحدة

---

[٤٨] فصل دراسي به ٥٠ طالب منهم ٣٠ يدرسون الفيزياء ، و٢٠ يدرسون الرياضيات ، ١٥ يدرسون المادتين معا . اختير طالب عشوائيا . احسب احتمال أن يكون الطالب المختار :

أولا : دارسا لإحدى المادتين على الأقل ثانيا : دارسا للفيزياء فقط

---

[٤٩] فصل دراسي به ٥٠ طالب منهم ٢٥ يدرسون الكيمياء ، ٢٠ يدرسون التاريخ ، ١٥ يدرسون الكيمياء والتاريخ فإذا اختير طالب عشوائيا أوجد احتمال ان يكون الطالب المختار ممن

❶ يدرسون الكيمياء أو التاريخ ❷ لا يدرس أيا من المادتين

سلسلة

الأوائل

فى

الهندسة

للصف الثالث الإعدادى

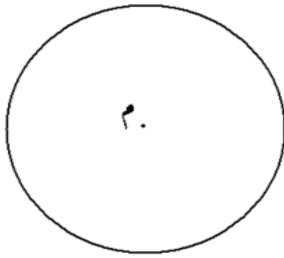
إعداد م / وليد رشدى

هدية مجانية



هندسة الدائرة

الدائرة



هي مجموعة لا نهائية من نقط المستوى التى تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة .

النقطة الثابتة تسمى مركز الدائرة. والبعد الثابت يسمى طول نصف القطر.

سطح الدائرة

(١) مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة

(٢) مجموعة النقاط داخل الدائرة اتحاد مجموعة نقاط الدائرة تسمى منطقة دائرية.

(٣) مركز الدائرة م ∈ لمجموعة النقط داخل الدائرة

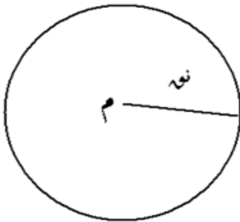
(٤) مركز الدائرة م ∉ لمجموعة نقط الدائرة

(٥) مركز الدائرة م ∈ لمجموعة نقط سطح الدائرة

(٦) مساحة سطح الدائرة = π نق٢

(٧) محيط الدائرة = ٢ π نق

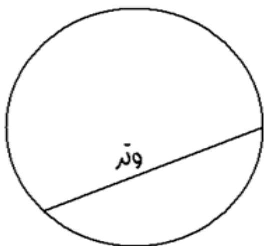
نصف قطر الدائرة :



(١) قطعة مستقيمة طرفيها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة.

(٢) أنصاف أقطار الدائرة الواحدة (الدوائر المتطابقة) متساوية فى الطول

وتر الدائرة :

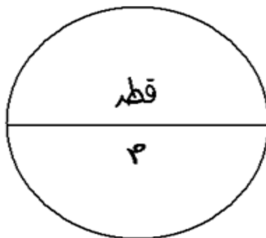


(١) قطعة مستقيمة طرفاها أى نقطتين مختلفتين من نقاط الدائره.

(٢) اوتار الدائرة ليس بالضرورة ان تكون متساوية

(٣) طول أى وتر فى الدائرة غير ما بمركزها أصغر من طول قطر الدائرة

قطر الدائرة :



(١) هو وتر فى الدائرة يمر بمركزها.

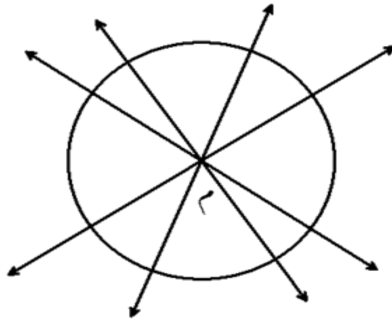
(٢) القطر أكبر وتر فى الدائرة

(٣) كل قطر يسمى وتر ولكن ليس كل وتر يسمى قطر



تطابق دائرتين :

يقال لدائرتان أنهما متطابقتان إذا تساوى طولا نصف قطريهما.



محور تماثل الدائرة

(١) كل مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها.

(٢) عدد محاور تماثل الدائرة = عدد لا نهائى من الدوائر

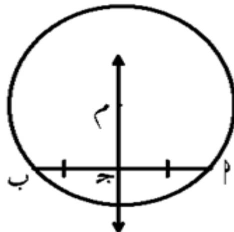
يلاحظ أن:

الدائره تجزئ مجموعة نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات هى :-

① مجموعة نقاط الدائرة ② مجموعة نقاط داخل الدائرة ③ مجموعة نقاط خارج الدائرة

نتائج هامة على الدائرة

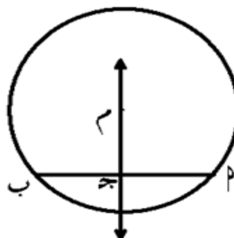
المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر



∵ جـ منتصف $\overline{ءب}$

∴ $\overleftrightarrow{مجـ} \perp \overline{ءب}$

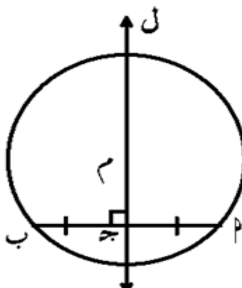
المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أى وتر فيها يكون ينصف هذا الوتر



∵ $\overleftrightarrow{مجـ} \perp \overline{ءب}$

∴ جـ منتصف $\overline{ءب}$

المستقيم المار عموديا على أى وتر من منتصفه يمر بمركز الدائرة (محور تماثل لهذه للدائرة)



∵ جـ منتصف $\overline{ءب}$

∵ المستقيم ل $\perp \overline{ءب}$

∴ م $\in$ المستقيم ل



ملاحظات لحل التمارين

(١) فى المثلث القائم الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوى نصف طول الوتر

(٢) فى المثلث القائم مربع الوتر = مجموع مربعي ضلعي القائمة

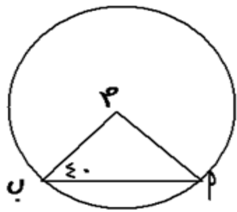
(٣) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها = نصف طول هذا الضلع

(٤) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتين (متساويتان فى القياس)

مثال [١]

دائرة م ، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ نصفى قطر فيها ، ق(∠ أ ب م) = ٤٠° احسب ق(∠ م)

الحل



∵ م أ = م ب = نق

∴ △ أ م ب متساوى الساقين

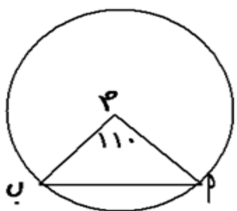
∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٤٠°

∴ ق(∠ م) = ١٨٠ – (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ - ٨٠ = ١٠٠°

مثال [٢]

دائرة م ، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ نصفى قطر فيها ، ق(∠ أ م ب) = ١١٠° احسب ق(∠ أ)

الحل ∵ م أ = م ب = نق



∴ △ أ م ب متساوى الساقين

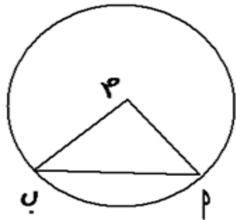
∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = $\frac{١٨٠ - ١١٠}{٢}$ = $\frac{٧٠}{٢}$ = ٣٥°

مثال [٣]

دائرة م ، $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ نصفى قطر فيها ، $\overline{مأ} \perp \overline{مب}$ ، مساحة المثلث أ ب جـ = ٣٢ سم٢
احسب مساحة الدائرة

الحل ∵ م أ = م ب = نق

∴ △ أ م ب متساوى الساقين



مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب = ٣٢

= $\frac{١}{٢}$ نق × نق = $\frac{١}{٢}$ نق٢ = ٣٢ ∴ نق٢ = ٦٤ نق = ٨

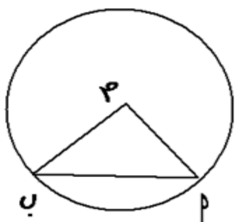
مساحة الدائرة = π نق٢ = ٦٤π سم٢

مثال [٤]

دائرة م ، $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ نصفى قطر فيها ، $\overline{مأ} \perp \overline{مب}$ ، مساحة الدائرة = ٢٥ط سم٢
احسب مساحة المثلث أ ب جـ

الحل

∵ م أ = م ب = نق ∴ △ أ م ب متساوى الساقين



مساحة الدائرة = π نق٢ = ٢٥π سم٢

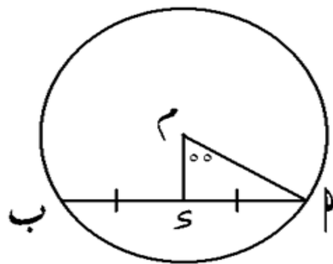
∴ نق٢ = ٢٥ نق = ٥ سم

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب = $\frac{١}{٢}$ نق × نق

= $\frac{١}{٢}$ نق٢ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ = $\frac{٢٥}{٢}$

[٥] في الشكل المقابل

الدائرة م فيها ء منتصف أب ، ق(∠ م) = ٥٥° أوجد ق(∠ م ء أ)



∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ م ء أ) = ٩٠°

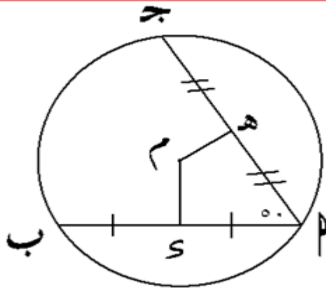
∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – (٩٠° + ٥٥°)

= ١٨٠° – ١٤٥° = ٣٥°

[٦] في الشكل المقابل

أب ، أجـ وتران فى دائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٥٠° ، ء منتصف أب ، هـ منتصف أجـ

احسب : ق(∠ ء م هـ)



∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ أ ء م) = ٩٠° .... ❶

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ

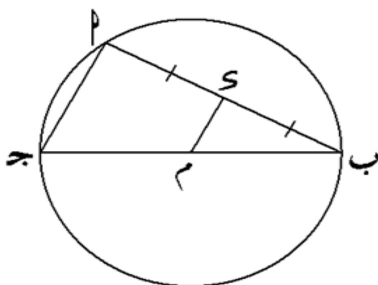
∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠° .... ❷

∴ ق(∠ م) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ٣٦٠° – ٢٣٠° = ١٣٠°

[٧] في الشكل المقابل

أب وتر فى دائرة م ، ب جـ قطر فيها ، ء منتصف أب اثبت أن م ء // أجـ .

ثم احسب : ق(∠ أ)



∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ ب ء م) = ٩٠°

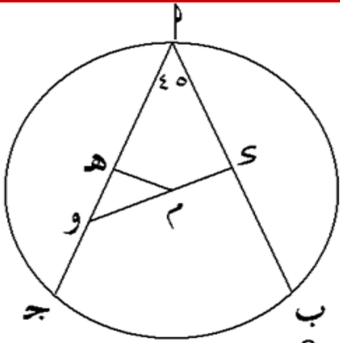
∵ م منتصف القطر ب جـ ∵ ء منتصف أب

∴ م ء // أجـ ∴ ق(∠ ب ء م) = ق(∠ أ) = ٩٠° بالتناظر

٨) في الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٤٥° ، ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

اثبت أن : △ هـ و م متساوى الساقين



∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

∴ ق(∠ أ ء م) = ٩٠° .... ❶

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ

∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠° .... ❷

∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٥°) = ١٣٥°

∵ ق(∠ هـ م و) = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

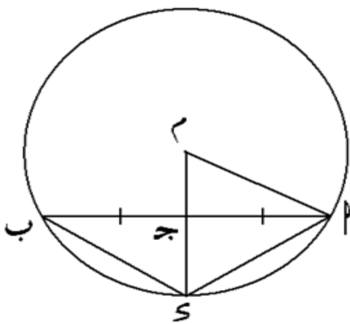
∵ ق(∠ م هـ و) = ٩٠° ∴ ق(م و هـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ ق(∠ هـ و م) = ق(∠ هـ م و) = ٤٥°

∴ هـ م = هـ و ∴ △ م هـ و متساوى الساقين

٩) في الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم ، أ ب وترفيها طوله ٢٤سم ، جـ منتصف أ ب ، م جـ ∩ الدائرة م = { ء } **أوجد :** مساحة △ أ ء ب



∵ جـ منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

∴ ق(∠ أ جـ م) = ٩٠°

فى △ أ م جـ القائم فى ∠ أ جـ م ∵ أ جـ = جـ ب = ١٢سم

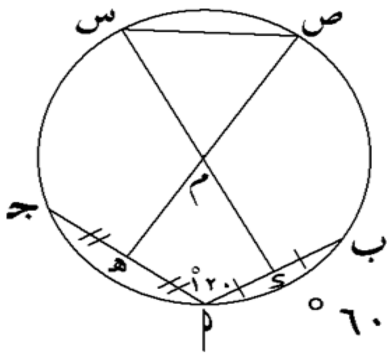
∵ (م جـ)^2 = (أ م)^2 − (أ جـ)^2 = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

∴ م جـ = ٥سم ∵ م ء = ١٣سم ∴ جـ ء = ١٣ − ٥ = ٨سم

∴ مساحة △ أ ء ب = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × جـ ء = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٨ = ٩٦سم^2

[١٠] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران فى الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب
$\overrightarrow{ءم}$ ، $\overrightarrow{هـم}$ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب **اثبت أن** △ س ص م متساوى الأضلاع



∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$

∴ ق(∠ أءم) = ٩٠° .... ❶

∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{أجـ}$

∴ ق(∠ أهـم) = ٩٠° .... ❷

∴ ق(∠ ءمهـ) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∵ ق(∠ ءمهـ) = ق(∠ س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

∵ م س = م ص = نق ∴ ق(∠ س) = ق(∠ ص) = ٦٠°

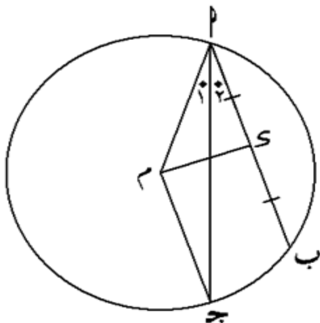
∴ م س = م ص = س ص = نق ∴ △ س ص م متساوى الأضلاع

[١١] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ وترفى الدائرة م ، $\overrightarrow{أجـ}$ ينصف (∠ ب أ م) ويقطع الدائرة م فى جـ
، اذا كانت ء منتصف $\overline{أب}$ **اثبت أن** : $\overline{ءم} \perp \overline{مجـ}$

∵ فى △ م أ جـ ∵ م أ = م جـ ∴ △ م أ جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ ١) = ق(جـ) .... ❶



∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

∴ ق(جـ) = ق(∠ ٢) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{مجـ}$ ∵ ء منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$

∴ ق(∠ مء أ) = ٩٠° ∵ $\overline{أب}$ // $\overline{مجـ}$ ، $\overline{مء}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ مء أ) = ق(∠ ءمجـ) = ٩٠° $\overline{مء} \perp \overline{مجـ}$

[١٢] في الشكل المقابل

سص وتر فى الدائرة م ، ع منتصف سص ، سم المستقيم م ع قطع الدائرة فى ل ، ط

اثبت أن : ق(∠ ل س ط) = ٩٠°

، إذا كان س ص = ١٢سم ، ل ع = ٩سم . **احسب طول قطر الدائرة .**

فى △ ط س ل

∵ م س = م ط = م ل = نق

∵ م منتصف ط ل ∴ م س متوسط △ ط س ل

∵ م س = $\frac{1}{2}$ ط ل ∴ ق(∠ ط س ل) = ٩٠°

∵ س منتصف س ص ∴ ل ع ⊥ س ص

∵ ق(∠ ل س ط) = ٩٠° ∴ من إقليدس

(س ع)^٢ = ط ع × ع ل = (٦)^٢ = ٣٦

∴ ط ع × ٩ = ٣٦ ∴ ط ع = ٤سم

طول القطر = ط ل = ٤ + ٩ = ١٣سم

[١٣] في الشكل المقابل

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م ، م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ .

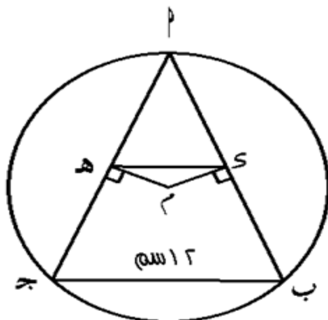
اثبت أن ء هـ // ب جـ وإذا كان ب جـ = ١٢سم **أوجد** طول ء هـ

∵ م ء ⊥ أ ب ∴ ء منتصف أ ب

∵ م هـ ⊥ أ جـ ∴ هـ منتصف أ جـ

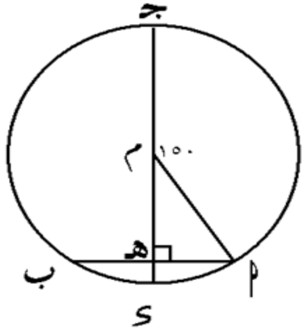
∴ ء هـ // ب جـ ∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦سم



[١٤] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ وتر فى دائرة مركزها م ، $\overline{جـ ء}$ قطر فيها ، $\overline{جـ ء} \perp \overline{أب}$ فإذا كان أ ب = ٨سم
، ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠° **أوجد** طول $\overline{جـ ء}$



∵ ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠°

∴ ق(∠ أ م ء) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ∴ هـ منتصف $\overline{أب}$

∴ أ هـ = هـ ب = ٤سم ∵ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

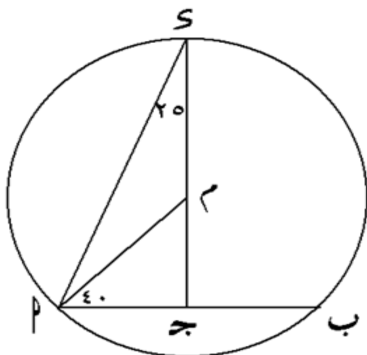
∵ ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠° ∴ ق(∠ أ م ء) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

∴ △ م هـ أ ثلاثينى ستينى ∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ م

∴ أ م = ٢ أ هـ = ٨سم ∴ جـ ء = ٢ أ م = ٢ × ٨ = ١٦سم

[١٥] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، ق(∠ ء) = ٢٥° ، ق(∠ م أ جـ) = ٤٠°
برهن أن : جـ منتصف $\overline{أب}$



∵ فى △ م ء أ ∵ م ء = م أ = نق

∴ ق(∠ م أ ء) = ق(∠ ء) = ٢٥°

∵ ق(∠ م أ جـ) = ٤٠°

∴ ق(∠ ء أ جـ) = ٤٠° + ٢٥° = ٦٥°

فى △ أ ء جـ

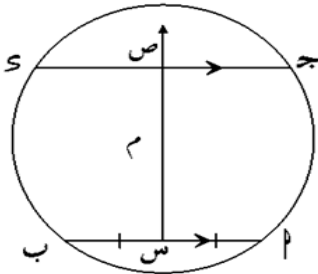
∴ ق(∠ ء جـ أ) = ١٨٠° − (٢٥° + ٦٥°) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∴ $\overline{م جـ} \perp \overline{أب}$ ∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

[١٦] في الشكل المقابل

م دائرة ، $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، س منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftarrow{س م}$ فقطع $\overline{جـ ء}$ فى ص

اثبت أن : ص منتصف $\overline{جـ ء}$



∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

∴ ق($\angle$ أ س م) = ٩٠°

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ∵ $\overline{س ص}$ قاطع لهما

∴ ق($\angle$ أ س ص) = ق($\angle$ ء ص س) = ٩٠°

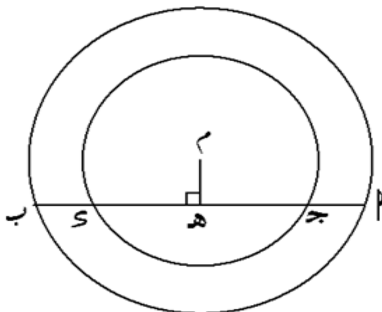
∴ $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$ ∴ ص منتصف $\overline{جـ ء}$

[١٧] في الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$

اثبت أن : أ جـ = ب ء

فى الدائرة الصغرى



∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{جـ ء}$ ∴ هـ منتصف $\overline{جـ ء}$

∴ هـ ء = هـ جـ .... (١)

∵ فى الدائرة الكبرى

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ∴ هـ منتصف $\overline{أب}$

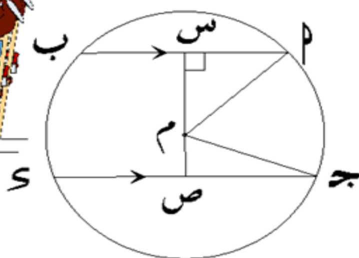
∴ هـ ب = هـ أ .... (٢) بطرح (١) من (٢)

∴ هـ ب – هـ ء = هـ أ – هـ جـ ∴ ب ء = أ جـ

[١٨] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان فى دائرة م ، أ ب = ١٢ سم ، جـ ء = ١٦ سم أوجد البعد بين هذين الوترين اذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠ سم





العمل نرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ٵ ب}}$

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ٵ ب}}$ ∴ س منتصف $\overline{\text{ٵ ب}}$

∴ ٵ س = ب س = ٦سم

∵ م ٵ = ١٠سم ∴ من فيثاغورث فى △ ٵ س م

∵ (م س)^2 = (ٵ م)^2 − (ٵ س)^2 = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

∴ م س = ٨سم .... ❶

∵ $\overline{\text{ٵ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، س ص قاطع لهما

∴ ق(∠ ٵ س ص) = ق(∠ س ص جـ) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ∴ ص منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ ∴ جـ ص = ء ص = ٨سم

∴ فى △ م ص جـ من فيثاغورث

∴ (م ص)^2 = (م جـ)^2 − (جـ ص)^2 = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦

∴ م ص = ٦سم .... ❷

∴ س ص (البعد بين الوترين) = ٨ + ٦ = ١٤سم

(١٩) في الشكل المقابل

ٵ ب قطر فى الدائرة م ، جـ ء وترفيها ، هـ ∈ $\overline{\text{م ٵ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{و ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$. **برهن أن** ٵ هـ = ب و

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ∴ س منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ ∴ جـ س = ء س

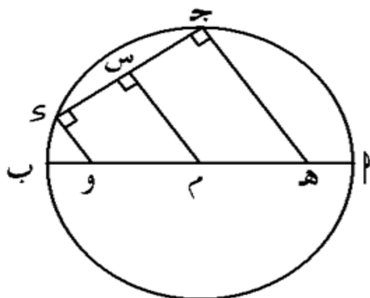
∵ $\overline{\text{هـ جـ}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$

∵ $\overline{\text{و ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ∴ $\overline{\text{هـ جـ}}$ // $\overline{\text{م س}}$ // $\overline{\text{و ء}}$

∵ $\overline{\text{ٵ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ قاطعان ∵ جـ س = ء س

∴ هـ م = م و ∵ م ٵ = م ب = نق

∴ ٵ هـ = ب و





موضع نقطة بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع نقطة بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين البعد بين النقطة أ ومركز الدائرة م وليكن أ م فإذا كانت

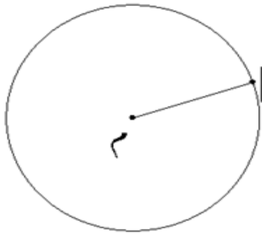
❶ البعد أ م = نق فان النقطة تقع على الدائرة .

❷ البعد أ م > نق فان النقطة تقع خارج الدائرة .

❸ البعد أ م < نق فان النقطة تقع داخل الدائرة .

❹ البعد أ م = ٠ فان النقطة فى تقع مركز الدائرة (داخل الدائرة) .

إذا كان أ تقع على الدائرة

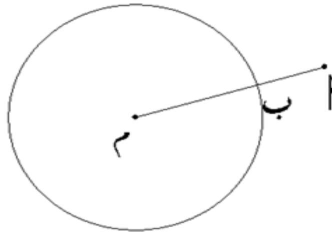


البعد أ م = نق فان النقطة تقع على الدائرة ، تقع على الدائرة.

م أ = نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { أ }

إذا كان أ تقع خارج الدائرة

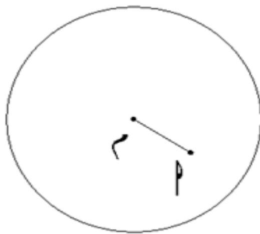


م أ > نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { ب }

النقطة تقع خارج الدائرة إذا كان البعد م أ ∈] نق ، ∞ [

إذا كان أ تقع داخل الدائرة



م أ < نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = ∅

النقطة تقع داخل الدائرة إذا كان البعد م أ ∈ [صفر ، نق [

موضع مستقيم بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع مستقيم ل بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين بعد مركز الدائرة م عن المستقيم ل وليكن م أ فإذا كان

❶ أ م > نق كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة .

❷ أ م = نق كان المستقيم ل مماس للدائرة .

❸ أ م < نق كان المستقيم ل قاطع للدائرة .

❹ أ م = صفر كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة .

ملاحظات

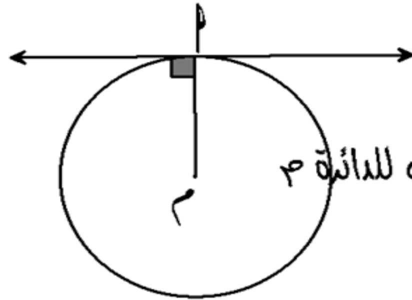
❶ المستقيم ل يقع **خارج الدائرة** إذا كان البعد أ م ∈] نق ، ∞ [

❷ المستقيم ل يسمى **مماس** لدائرة إذا كان البعد أ م = نق

❸ المستقيم ل يسمى **قاطع** لدائرة إذا كان البعد أ م ∈] صفر ، نق [

❹ المستقيم ل يسمى **محور تماثل** لدائرة إذا كان البعد أ م = صفر

ل مماس للدائرة م



(أ) م أ = نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل مماس للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { أ }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

(ج) ل ∩ سطح الدائرة م = { أ }

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

ل قاطع للدائرة م

(أ) م أ < نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل أقل من نق كان المستقيم ل قاطع للدائرة م

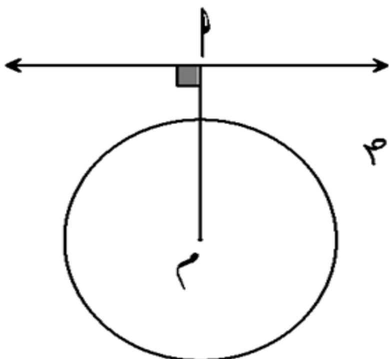
(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، ج }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين كان المستقيم ل قاطع للدائرة

(ج) ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{ب ج}}$

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل يقع خارج الدائرة م



(أ) م أ > نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل خارج الدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل خارج الدائرة

(ج) ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل محور تماثل لدائرة م

(أ) م أ = صفر

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى صفر كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

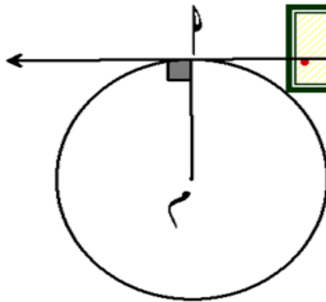
(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ } و يمر بالنقطة م

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين و يمر بالنقطة م كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م =

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة و يمر بالنقطة م كان المستقيم ل قاطع للدائرة

نتيجة ١



المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .

أى أن نصف القطر للدائرة يكون عمودى على المماس عند نقطة التماس

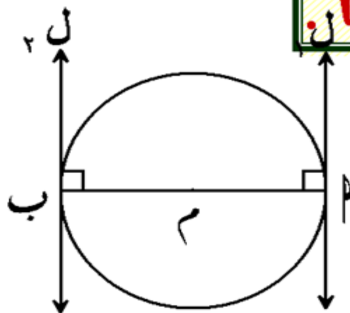
$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

م أ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ق(م أ ب) = ٩٠°

نتيجة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماس لها .

نتيجة ٣



المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان .

إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م وكان $\overline{أب}$ ⊥ ل ١ ، $\overline{أب}$ ⊥ ل ٢ فان

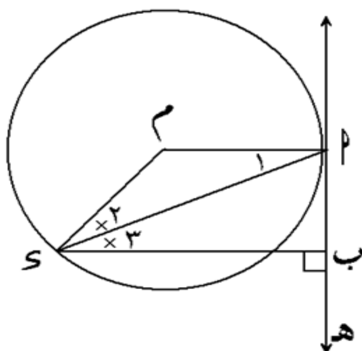
ل ١ ، ل ٢ مماسا للدائرة .

المماسان ل ١ ، ل ٢ عمودان على القطر $\overline{أب}$ ، و منها ل ١ // ل ٢

أى أن المماسان لدائرة عند نهايتى القطر يكونان متوازيان

[١] فى الشكل المقابل

وضح لماذا يكون المستقيم ↔أ ب مماس .



∵ م أ = م د = نق   ∴ △ م أ د متساوى الساقين

∴ قَ(∠ ١) = قَ(∠ ٢)   ∴ قَ(∠ ٢) = قَ(∠ ٣)

∴ قَ(∠ ١) = قَ(∠ ٣) وهما فى وضع تبادل

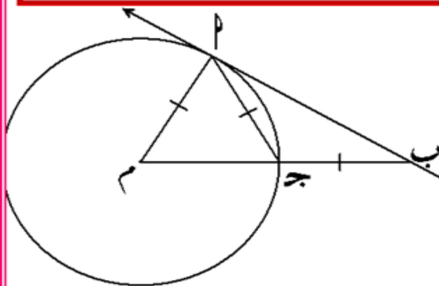
∴ ‾أ م ∥ ‾د ب

∴ قَ(∠ هـ ب د) = قَ(∠ ب أ م) = ٩٠° بالتناظر

∴ ‾م أ ⊥ ‾أ ب عند نقطة أ   ∴ ↔أ ب مماس

[٢] فى الشكل المقابل

وضح لماذا يكون المستقيم ↔أ ب مماس .



∵ م أ = م جـ = نق

∵ أ جـ = م أ = ب جـ   ∴ م جـ = ب جـ

∴ جـ منتصف م ب   ∴ ‾أ جـ متوسط △ م أ ب

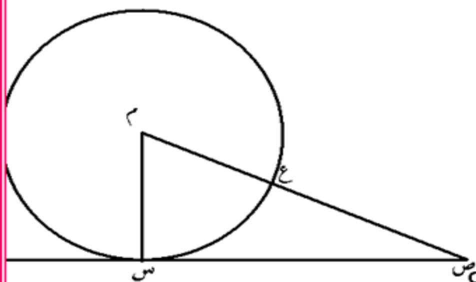
∵ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ م ب   ∴ ∠ ب أ م قائم

∴ قَ(∠ ب أ م) = ٩٠°   ∴ ‾م ب ⊥ ↔أ ب   ∴ ↔أ ب مماس

[redacted]

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، س ص = ١٢سم ، ‾م ص ∩ الدائرة = { ع } ، ع ص = ٨سم

اثبت أن : المستقيم ↔س ص مماس للدائرة م عند س



∵ م س = م ع = ٥سم   ∴ م ص = ٥ + ٨ = ١٣سم

∵ (م ص)٢ = (١٣)٢ = ١٦٩ .... ❶

∵ (م س)٢ + (س ص)٢ = (٥)٢ + (١٢)٢

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ .... ❷ من ❶ ، ❷

∴ (م ص)٢ = (م س)٢ + (س ص)٢   ∴ قَ(س) = ٩٠°

∴ ‾م س ⊥ ↔س ص   ∴ ↔س ص مماس

[٤] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى فى جـ ، أ ب = ٨سم
، طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم **أوجد** : طول نصف قطر الدائرة الصغرى

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة الصغرى عند جـ
∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠ م جـ أ) = ٩٠°
∵ فى الدائرة الكبرى ∵ $\overline{أب}$ وتر فيها ∵ $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$
∴ جـ منتصف أ جـ ∴ أ جـ = ب جـ = ٤سم
∴ فى △ م جـ أ ∵ ق(∠ م جـ أ) = ٩٠°
$(م جـ)^2 = (م أ)^2 - (أ جـ)^2 = (٥)^2 - (٤)^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$
∴ م جـ = ٣سم ∴ نق الصغرى = ٣سم

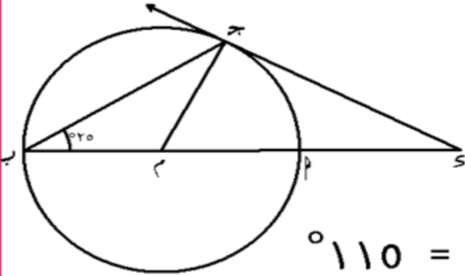
[٥] فى الشكل لمقابل

$\overline{أب}$ مماسية للدائرة م عند ب ، ق(∠ أ) = س ، ق (∠ م) = ٢س اثبت أن :
جـ منتصف $\overline{أم}$ ، إذا كان : أ م = ١٤سم **فأوجد** مساحة سطح الدائرة م حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{مب} \perp \overline{أب}$
∴ ق(∠ ب)= ٩٠°
∴ ق(∠ م) + ق(∠ أ) = ٩٠°
∴ ٢س + س = ٩٠° ∴ ٣ س = ٩٠°
∴ س = ٣٠° ∴ △ أ ب م ثلاثينى ستينى
$م ب = \frac{١}{٢} م أ$ ∵ م ب = م جـ = نق
∴ جـ منتصف $\overline{م أ}$ ∵ أ م = ١٤سم ∴ م ب = نق = ٧سم
∴ مساحة الدائرة = π نق^2 = π $(٧)^2$ = ٤٩ π سم^2

[٦] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، ء ∈ ب أ فإذا كان المستقيم ء جـ مماسا للدائرة عند جـ
، ق(∠ ب) = ٢٥° **فأوجد :** ق(∠ ء)



∵ فى △ م جـ ب ∴ م جـ = م ب = نق

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ م جـ ب) = ٢٥°

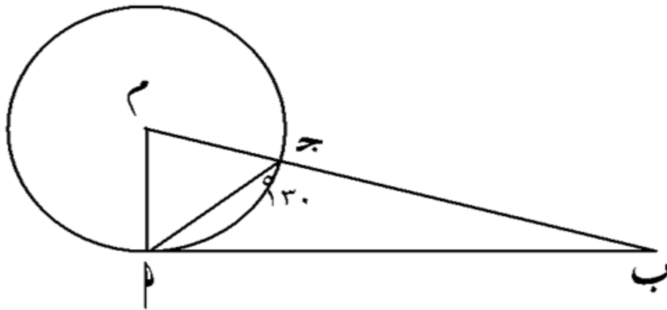
∵ ء جـ مماس ∴ م جـ ⊥ ء جـ

ق(∠ م جـ ء) = ٩٠° ∴ ق(∠ ء جـ ب) = ٩٠° + ٢٥° = ١١٥°

∴ ق(∠ ء) = ١٨٠° − (١١٥° + ٢٥°) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

[٧] فى الشكل لمقابل

أ ب مماسة للدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = { جـ } ق(∠ أ جـ ب) = ١٣٠°
أوجد ق(∠ م) ، ق(∠ ب)



∵ ∠ أ جـ ب = ∠ م جـ أ

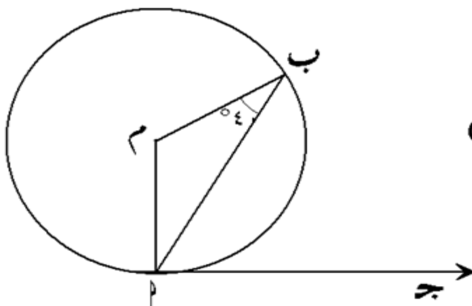
∴ ق(∠ م جـ أ) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

∵ م جـ = م أ = نق

∴ ق(∠ م جـ أ) = ق(م أ جـ) = ٥٠°

[٨] فى الشكل لمقابل

م دائرة أ جـ مماس لها عند أ ، فإذا كان ق(∠ أ ب م) = ٤٠° **أوجد** ق(∠ ب أ جـ)



∵ أ جـ مماس للدائرة عند أ

∴ م أ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠ م أ جـ) = ٩٠°

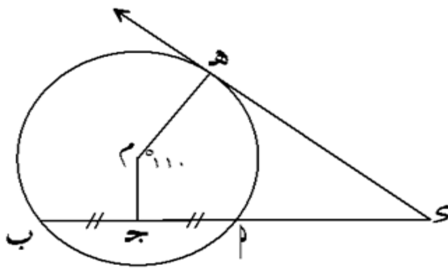
∵ م أ = م ب = نق ∴ △ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ ب) = ٤٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

[٩] فى الشكل المقابل

أ ب وتر فى الدائرة م ، ء هـ مماسا لها عند هـ ، جـ منتصف أ ب **أوجد** : بالبرهان ق(∠ ء)



∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ ق(∠ م جـ أ) = ٩٠°

∵ ء هـ مماس للدائرة عند هـ ∴ م هـ ⊥ ء هـ

∴ ق(∠ هـ) = ٩٠°

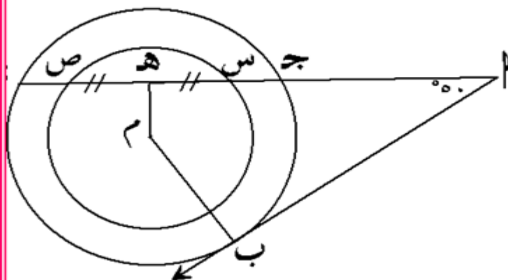
∴ ق(∠ ء) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ١١٠°)

= ٣٦٠° – ٢٩٠° = ٧٠°

[١٠] فى الشكل المقابل

هـ منتصف س ص ، أ ب للدائرة الكبرى عند ب ، ق(∠ أ) = ٥٠°

احسب : ق(∠ هـ م ب) **اثبت أن** : جـ س = ء ص



∵ أ ب مماس للدائرة الكبرى عند ب

∴ م ب ⊥ أ ب ∴ ق(∠ أ ب م) = ٩٠°

فى الدائرة الصغرى

∵ هـ منتصف س ص ∴ م هـ ⊥ س ص

∴ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

∴ ق(∠ هـ م ب) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

فى الدائرة الكبرى

∵ م هـ ⊥ جـ ء ∴ هـ منتصف جـ ء

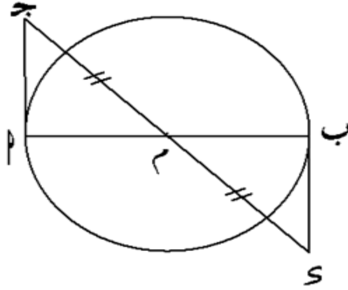
∴ هـ جـ = هـ ء ∵ هـ س = هـ ص

∴ هـ جـ – هـ س = هـ ء – هـ ص

∴ جـ س = جـ ء

[11] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، $\overleftarrow{أ جـ}$ مماسا لها عند أ ، رسم $\overleftarrow{جـ م}$ وفرضت عليه نقطة ء بحيث جـ م = م ء **اثبت أن** : $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماسا للدائرة عند ب



∵ $\overleftarrow{أ جـ}$ مماسا للدائرة عند أ ∴ $\overline{م أ} \perp \overline{أ جـ}$

∴ ق(∠ أ) = ٩٠°

∵ فى △△ م أ جـ ، م ب ء فيهما

(١) م جـ = م ء

(٢) م أ = م ب

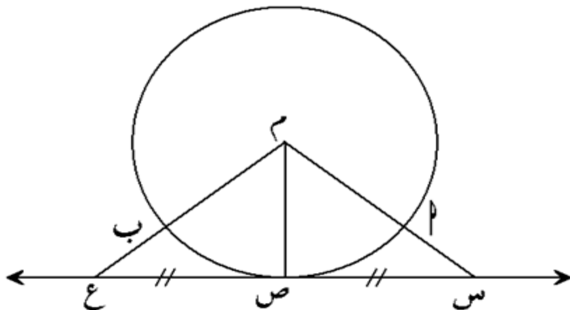
(٣) ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

△△ وينتج أن : ق(∠ ب) = ق(∠ أ) = ٩٠°

∴ $\overline{م ب} \perp \overline{ب ء}$ $\overline{ب ء}$ مماس للدائرة

[12] فى الشكل المقابل

المستقيم $\overleftrightarrow{س ع}$ مماس للدائرة م عند ص ، س ص = ص ع **اثبت أن** : أ س = ب ع



∵ المستقيم $\overleftrightarrow{س ع}$ مماس للدائرة م عند ص

∴ $\overline{م ص} \perp \overleftrightarrow{س ع}$

∴ ق(∠ م ص س) = ق(∠ م ص ع) = ٩٠°

∴ فى △△ م ص س ، م ص ع فيهما

(١) ق(∠ م ص س) = ق(∠ م ص ع) = ٩٠°

(٢) $\overline{م ص}$ ضلع مشترك

(٣) س ص = ع ص

∴ ≡ △△ وينتج أن : م س = م ص ∵ م أ = م ب = نق

∴ م س – م أ = م ع – م ب ∴ أ س = ب ع

[١٣] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، المستقيم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة م عند ب ، ق(∠أ) = ٢٥°

أوجد : ق(∠م جـ ب) ، ق(∠ء ب جـ)

م أ = م جـ ∴ △ م أ جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠١) = ق(∠أ) = ٢٥°

∵ ∠ب م جـ خارجة عن △ م أ جـ

∴ ق(∠ب م جـ) = ق(∠أ) + ق(∠١)

= ٢٥° + ٢٥° = ٥٠°

∵ م ب = م جـ ∴ △ م ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠٢) = ق(∠٣) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥°

∵ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ءهـ}$

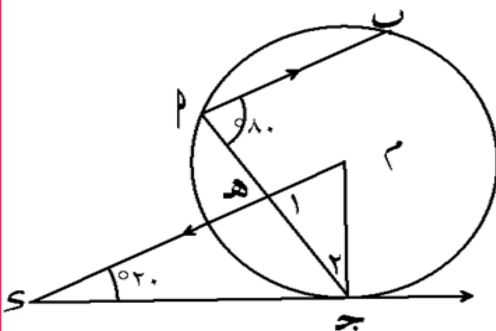
∴ ق(∠م ب ء) = ٩٠° ∴ ق(∠ء ب جـ) = ٩٠° + ٦٥° = ١٥٥°

[١٤] فى الشكل المقابل

$\overleftarrow{ءجـ}$ يمس الدائرة م عند جـ ، $\overline{أب}$ // $\overline{مء}$ ، ق(∠ب أ جـ) = ٨٠°

، ق(∠م ء جـ) = ٢٠° ، $\overline{أجـ}$ ∩ $\overline{مء}$ = {هـ}

أوجد : ق(هـ جـ م)



∵ $\overleftarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند جـ ∴ $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overleftarrow{ءهـ}$

∴ ق(∠م جـ ء) = ٩٠° ∵ ق(ء) = ٢٠°

∴ ق(م) = ٧٠°

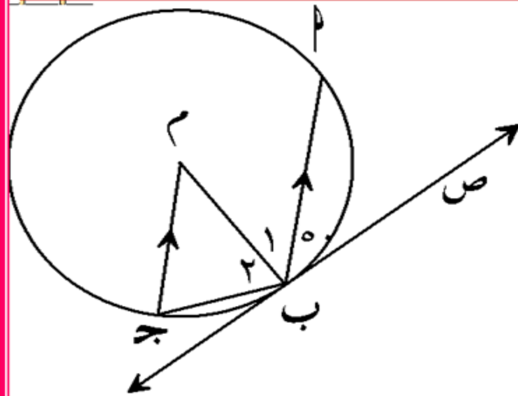
∵ $\overline{أب}$ // $\overline{ءم}$ ، $\overline{أجـ}$ قاطع لهما

∴ ق(∠أ) = ق(∠١) = ٨٠° بالتناظر

∴ ق(∠٢) = ١٨٠° − (٨٠° + ٧٠°) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

[١٥] فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{ب ص}$ مماسا للدائرة م عند ب ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{م جـ}$ ، ق(∠ أ ب ص) = ٥٠° **أوجد** ق(∠ م جـ ب)



∵ $\overleftrightarrow{ب ص}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب ص}$

∴ ق(∠ م ب ص) = ٩٠°

∵ ق(∠ ١) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∵ $\overline{أ ب}$ // $\overline{م جـ}$ ، $\overline{م ب}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ م) = ق(∠ ١) = ٤٠° بالتبادل

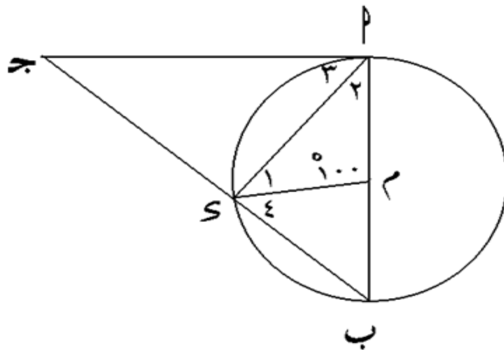
∵ م ب = م جـ = نق

∴ ق(∠ ٢) = ق(∠ جـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = $\frac{١٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

[١٦] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة م ، $\overline{أ جـ}$ قطعة مماسية للدائرة عند أ ، ق(∠ أ م ء) = ١٠٠° ،

أوجد ق(∠ ء أ م) ، ق(∠ جـ أ ء) ، ق(∠ أ ب ء)



∵ م أ = م ء = نق ∴ △ م أ ء متساوى الساقين

∴ ق(١) = ق(∠ ٢) = $\frac{١٨٠° - ١٠٠°}{٢}$ = $\frac{٨٠°}{٢}$ = ٤٠°

∵ $\overline{أ جـ}$ مماس للدائرة عند أ ∴ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

∴ ق(∠ م أ جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ ٣) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

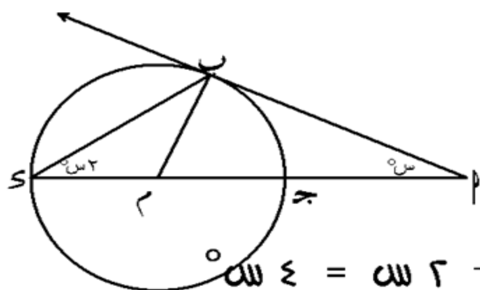
∵ ∠ أ م ء خارجة عن △ م ء ب ∴ ق(∠ ٤) + ق(∠ ب) = ق(∠ أ م ء)

∵ م ء = م ب = نق ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ٤) = $\frac{١٠٠°}{٢}$ = ٥٠°

[١٧] فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة م عند ب ، $\overline{\text{جـ ء}}$ قطر فيها ، ق(∠ ب أ م) = س° ، ق(∠ م ء ب) = ٢س°

أوجد قيمة س بالدرجات



∵ م ب = م ء = نق ∴ △ م ب ء متساوى الساقين

∴ ق(∠ م ب ء) = ق(∠ ء) = ٢س°

∵ ∠ ب م أ خارجة عن △ ب م ء

∴ ق(∠ ب م أ) = ق(∠ ء) + ق(∠ م ب ء) = ٢ س + ٢ س = ٤ س°

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

∴ ق(∠ م ب أ) = ٩٠° ∴ فى △ أ ب م

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ أ م ب) = ٩٠° ∴ س° + ٤ س° = ٩٠°

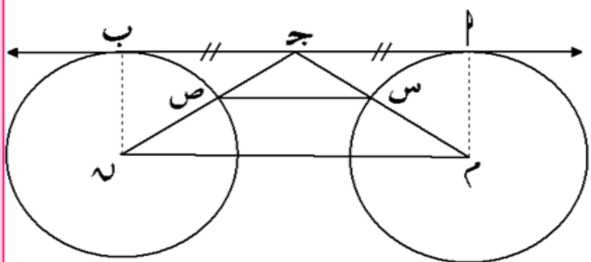
∴ ٥ س = ٩٠ ∴ س = $\frac{٩٠}{٥}$ = ١٨°

[١٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك لهما ، جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، الدائرة م ∩ $\overline{\text{م جـ}}$ = { س } ، الدائرة ن ∩ $\overline{\text{ن جـ}}$ = { ص } **اثبت أن :**

① $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ ② △ جـ م ن متساوى الساقين . ③ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$



∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرتين

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{م أ}}$ // $\overline{\text{ن ب}}$ ∵ م أ = ن ب = نق

∵ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ أ ب ن م مستطيل ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ن}}$

∵ فى △△ م أ جـ ، ن ب جـ فيهما



(١) ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ٩٠°

(٢) م أ = ن ب = نق

(٣) أ جـ = ب جـ

∴ ΔΔ ≡ وينتج أن : م جـ = ن جـ

∴ Δ م جـ ن متساوى الساقين ∵ م س = ن ص = نق   ∴ جـ س = جـ ص

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)   ∵ ∠ م جـ ن) زاوية مشتركة فى ΔΔ م جـ ن ، س جـ ص

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ جـ م ن) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$



موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى :

[١] الدائرتان المتباعدتان :

❶ م ن > نق١ + نق٢

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅

[٢] الدائرتان المتماستان من الخارج :

❶ م ن = نق١ + نق٢

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

[٣] الدائرتان المتقاطعتان :

❶ نق١ – نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

❸ أى دائرتان تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

[٤] الدائرتان المتماستان من الداخل :

❶ م ن = نق١ – نق٢

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

[٥] الدائرتان المتداخلتان :

❶ م ن < نق١ – نق٢

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

[٦] الدائرتان المتحدتان فى المركز :

❶ م ن = صفر

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن



الدائرتان متباعدتان

المجموع ⊕ ← الدائرتان متماستان من الخارج

الدائرتان متقاطعتان

الطرح ⊖ ← الدائرتان متماستان من الداخل

الدائرتان متداخلتان

الدائرتان متحدتان فى المركز م ن = ٠

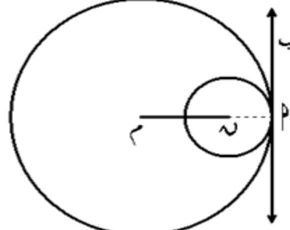
نتيجة ١:

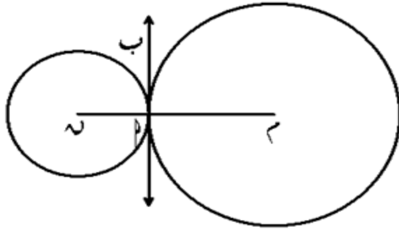
خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس

∵ م ن خط مركزين

∵ أ ب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب





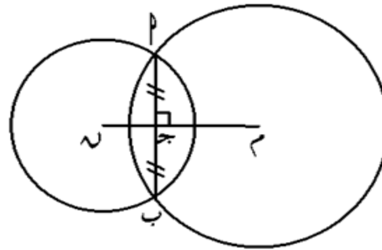
نتيجة ٢:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك و ينصفه

∵ م ن خط مركزين

∵ أ ب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب



ملاحظات هامة

1. خط المركزين لدائرتين متقاطعتين محور تماثل للوتر المشترك
2. الوتر المشترك عمودى على خط المركزين فقط
3. خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك
4. خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يمر بنقطة التما

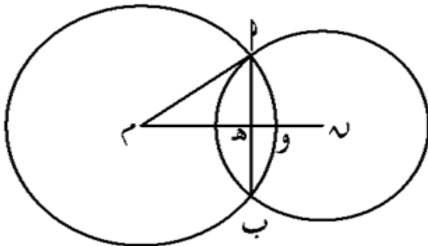


[١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ؟ ، ب ، ؟ب ∩ م ن = { هـ } ، م ن ∩ الدائرة م = { و }
، ؟ ب = ٦سم ، م ؟ = ٥سم ، م ن = ٧سم . **أوجد طول** ؟ هـ ، هـ و

∵ م ن خط مركزين ∵ ؟ ب تر مشترك ∴ م ن ⊥ ؟ ب

∴ هـ منتصف ؟ ب



∴ ؟ هـ = هـ ب = ٣سم ∴ ق (∠ ؟ هـ م) = ٩٠°

∴ فى △ ؟ هـ م من فيثاغورث

∴ (م هـ)^2 = (؟ م)^2 – (؟ هـ)^2 = ٢٥ – ٩ = ١٦

∴ م هـ = ٤سم ∵ م ؟ = م و = ٥سم = نق الدائرة م

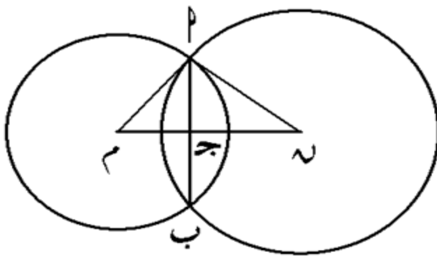
∴ و هـ = ٥ – ٤ = ١ سم

[٢] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى ؟ ، ب ، ؟ ب ∩ م ن = { جـ } ، فإذا كان : م ؟ = ٦سم
، ن ؟ = ٨سم ، م ن = ١٠سم فأوجد : طول ؟ ب

فى △ ؟ م ن ∵ (م ن)^2 = ١٠٠ .... ①

∵ (م ؟)^2 + (ن م)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ .... ②



∴ (م ن)^2 = (م ؟)^2 + (ن م)^2

∴ ق (∠ م ؟ ن) = ٩٠° عكس نظرية فيثاغورث

∵ م ن خط مركزين ، ؟ ب وتر مشترك ∴ م ن ⊥ ؟ ب

∴ من أقليدس ؟ جـ = $\frac{\text{؟ م} \times \text{؟ ن}}{\text{م ن}}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

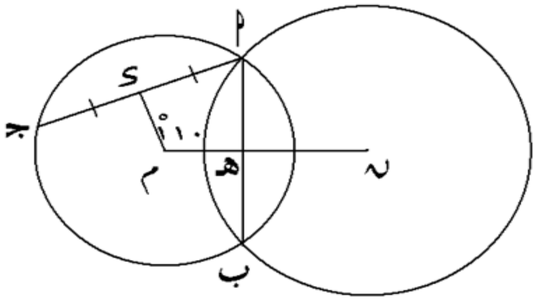
∵ م ن خط مركزين ، ؟ ب وتر مشترك ∴ جـ منتصف ؟ ب

∴ ؟ جـ = ب جـ = ٤,٨ سم ∴ ؟ ب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

[٣] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . فإذا كان $\overline{أب}$ ∩ $\overline{م ن}$ = { هـ } ، $\overline{أ جـ}$ وتر فى الدائرة م

، ء منتصف أ جـ ، ق(∠ م) = ١١٠° **أوجد :** ق(∠ ب أ جـ)



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠°

∵ فى الدائرة م ∵ ء منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

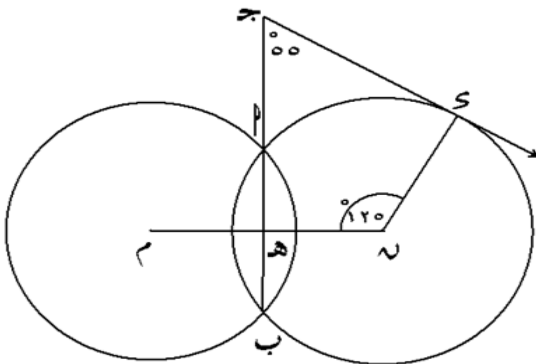
∴ ق(∠ أ ء م) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١١٠°) = ٣٦٠° − ٢٩٠° = ٧٠°

[٤] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . وكانت جـ ∈ $\overrightarrow{ب أ}$ ، ء ∈ الدائرة ن ، ق(م ن ء) = ١٢٥° ،

ق(∠ ب جـ ء) = ٥٥° **اثبت أن :** المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة ن عند ء



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ ق(∠ أ هـ ن) = ٩٠°

∵ ق(∠ ء) = ٣٦٠° − (٩٠° + ١٢٥° + ٥٥°)

= ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠°

∴ $\overline{ن ء}$ ⊥ $\overleftarrow{جـ ء}$

∴ $\overleftarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة ن

[٥] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب حيث جـ ء قطر فى الدائرة م ،
اثبت أن : ق(∠ ء م ن) = ق(∠ جـ هـ ب)

∵ هـ جـ مماس للدائرة م ∴ جـ ء ⊥ هـ جـ

∴ ق(∠ جـ) = ٩٠°

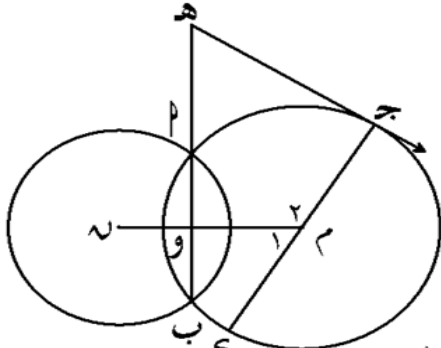
∵ م ن خط مركزين ∵ أ ب تر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ∴ ق(∠ هـ و م) = ٩٠°

∴ ∠ هـ و م تكمل ∠ جـ

∴ (∠ ٢) تكمل (∠ هـ) ∵ (∠ ١) تكمل (∠ ٢)

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ هـ) ∴ ق(∠ ء م ن) = ق(∠ جـ هـ ب)



[٦] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . ء منتصف ص جـ ، ق(س) = ٥٢°
، ق(∠ ء م هـ) = (٣ ل + ٨)° **احسب** قيمة ل

∵ م ن خط مركزين ∵ أ ب تر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠°

∵ ء منتصف جـ ص ∴ م ء ⊥ جـ ص

∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠°

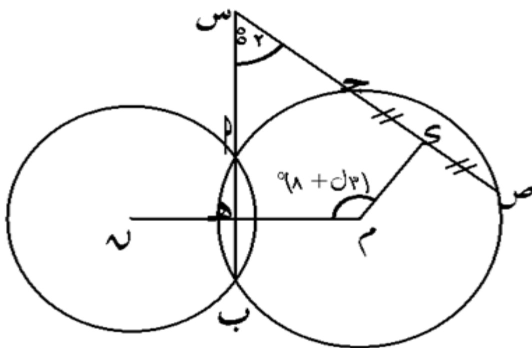
∵ ∠ م ء س تكمل ∠ س هـ م

∵ الشكل س ء م هـ شكل رباعى

∴ ق(∠ س) + ق(∠ م) = ١٨٠° ∴ ٣ ل + ٨ + ٥٢ = ١٨٠

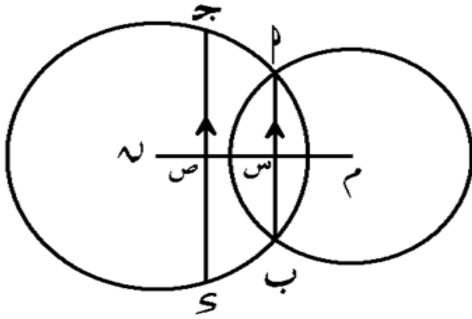
∴ ٣ ل + ٦٠ = ١٨٠° ∴ ٣ ل = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∴ ل = $\frac{١٢٠}{٣}$ = ٤٠°



[ل] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{مـ ن} \cap \overline{أ ب} = \{س\}$ ، $\overline{جـ ء} \parallel \overline{أ ب}$
، $\overline{م ن} \cap \overline{جـ ء} = \{ص\}$ **اثبت أن :** ص منتصف $\overline{جـ ء}$



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين

∵ $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$

∴ ق(∠ أ س م) = ٩٠°

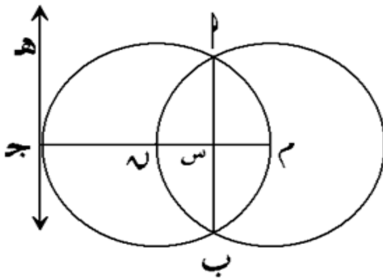
∵ $\overline{أ ب} \parallel \overline{جـ ء}$

∴ ق(∠ م ص جـ) = ق(∠ أ س م) = ٩٠° بالتناظر

∴ $\overline{ن ص} \perp \overline{جـ ء}$ ∴ ص منتصف $\overline{جـ ء}$

[ن] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان و متقاطعتان فى أ ، ب ، م ∈ الدائرة ن ، ن ∈ الدائرة م ،
المستقيم $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ مماس للدائرة ن عند جـ **اثبت أن :** $\overline{أ ب} \parallel \overleftrightarrow{جـ هـ}$



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$

∴ ق(∠ أ س م) = ٩٠°

∵ المستقيم $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ مماس للدائرة ن عند جـ

∴ $\overline{ن جـ} \perp \overleftrightarrow{جـ هـ}$

∴ ق(∠ جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ أ س م) = ٩٠° وهما فى وضع تناظر

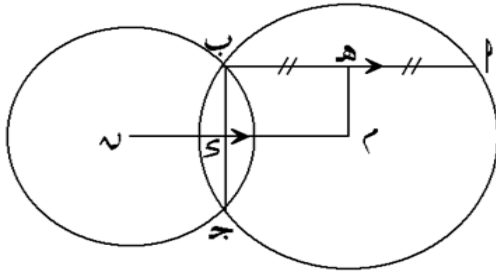
∴ $\overline{أ ب} \parallel \overleftrightarrow{جـ هـ}$



[٩] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ج ، ب ، $\overline{\text{م ن}} \cap \overline{\text{أ ب}}$ = { س }

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$ = { ء } ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ **اثبت أن :** هـ ء = طول نصف قطر الدائرة م .



∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين ∵ $\overline{\text{ج ب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ج ب}}$ ∴ ق(∠ ب ء م) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ق(∠ م هـ ب) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ ، م هـ قاطع لهما ∴ ق(∠ أ هـ م) = ق(∠ م) = ٩٠° بالتبادل

∴ ق(∠ ب) = ٩٠°

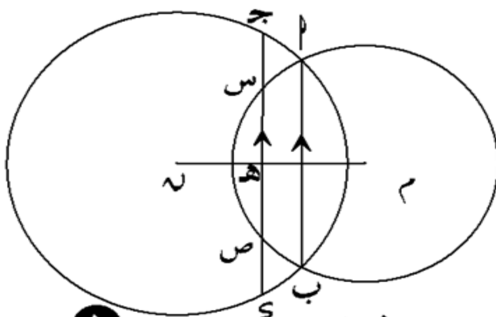
∴ هـ م ء ب مستطيل ∴ القطران متساويان

∴ ء هـ = م ب = نق ∵ هـ ء = طول نصف قطر الدائرة م .

[١٠] فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

ويقطع الدائرة م فى س ، ص ويقطع الدائرة ن فى ج ، ء **اثبت أن :** ج س = ء ص



∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$

∵ فى الدائرة م

∵ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ ∴ هـ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ∴ هـ س = هـ ص .... (١)

∵ فى الدائرة ن

∵ $\overline{\text{ن هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ج ء}}$ ∴ هـ منتصف $\overline{\text{ج ء}}$ ∴ هـ ج = هـ ء .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ هـ ج – هـ س = هـ ء – هـ ص

∴ ج س = ء ص



(١١) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{أب} \cap \overline{من} = \{ج\}$ ، $\overline{ب ء}$ قطر فى الدائرة م ، ب ج = ٤سم ، م ء = ٥سم **احسب** طول $\overline{أ ء}$

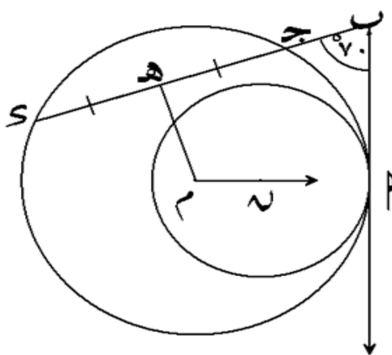
∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين   ∵ $\overline{أب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠ م ج ب) = ٩٠° ء

∴ ج منتصف $\overline{أب}$ ∴ أ ج = ب ج = ٤سم

∴ أ ب = ٨سم   ∵ م ء = ٥سم

∴ ء ب = ١٠سم



∵ م منتصف $\overline{ء ب}$ ∵ ج منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م ج} \parallel \overline{أ ء}$

∴ ق(∠ م ج ب) = ق(∠ أ) = ٩٠° بالتناظر

فى △ أ ء ب

∴ (أ ء)^2 = (ء ب)^2 – (أ ب)^2 = (١٠)^2 – (٨)^2 = ١٠٠ – ٦٤ = ٣٦

∴ أ ء = ٦سم

(١٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، هـ منتصف $\overline{ج ء}$ ، $\overline{أب}$ مماس مشترك عند أ ، ق(∠ ب) = ٧٠° احسب : ق(∠ هـ م ن)

فى الدائرة م :   ∵ هـ منتصف $\overline{ج ء}$

∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{ج ء}$

∴ ق(∠ م هـ ب) = ٩٠°

∵ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل   ∴ $\overleftarrow{م ن} \perp \overleftarrow{ب أ}$

∴ ق(∠ ب أ م) = ٩٠°

∴ ق(∠ م) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٧٠°) = ١١٠°

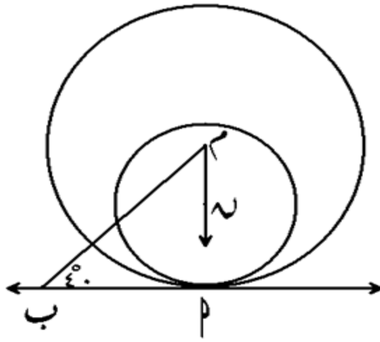


[١٣] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك عند أ

، إذا كان ق(∠ب) = ٤٠° **احسب :** ق(∠ن م ب)

المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك عند أ



∵ $\overrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°

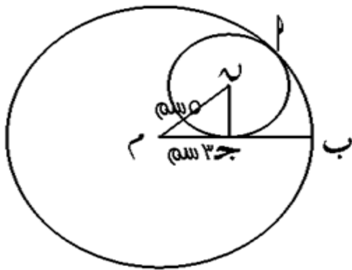
∴ ق(∠م) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

[١٤] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، رسم $\overline{م ب}$ مماس للدائرة ن عند جـ ، م جـ = ٣سم

، م ن = ٥سم **احسب :** طول $\overline{ب جـ}$



∵ $\overline{م ب}$ مماس للدائرة ن

∴ $\overline{ن جـ}$ ⊥ $\overline{م ب}$ ∴ ق(∠ن جـ م) = ٩٠°

فى △ ن جـ م :

(ن جـ)^{2} = (م ن)^{2} − (م جـ)^{2} = ٢٥ − ٩ = ١٦

ن جـ = نق الصغرى = ٤سم

∵ الدائرتان متماستان من الداخل ∴ نق الكبرى − نق الصغرى = م ن

∴ نق الكبرى = م ن + نق الصغرى = ٥ + ٤ = ٩سم

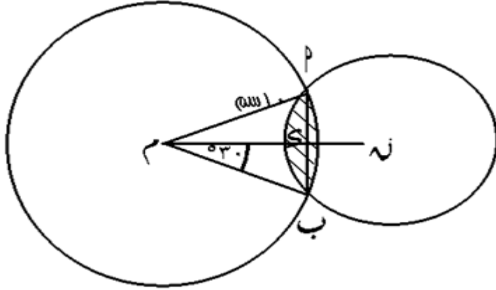
∵ م ب = نق الكبرى = ٩سم ∴ ب جـ = ٩ − ٣ = ٦سم



[١٥] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . م أ = ١٠سم ، ق(∠ ب م ء) = ٣٠° **احسب طول** $\overline{أب}$

∵ $\overleftrightarrow{من}$ خط مركزين ∵ $\overline{أب}$ وتر مشترك



∴ $\overleftrightarrow{من} \perp \overline{أب}$

∴ ء منتصف $\overline{أب}$

∵ فى △ م ء ب القائم فى ء

∵ ق(∠ ء م ب) = ٣٠° ∴ △ ء م ب ثلاثينى ستينى

∴ ء ب = $\frac{١}{٢}$ م ب ∵ م ب = م أ = ١٠سم ∴ ب ء = ٥سم

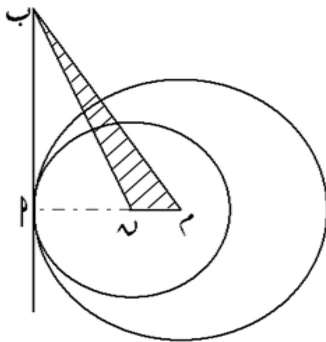
∴ أ ب = ٢ × ٥ = ١٠سم

[١٦] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠سم ، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك لهما عند أ ، إذا كانت مساحة △ ب م ن = ٢٤سم² **أوجد :** طول $\overline{أب}$

∵ الدائرتان متماستان من الداخل

∴ م ن = نق الكبرى – نق الصغرى = ١٠ – ٦ = ٤سم



∴ م ن = ٤سم

∵ $\overline{أب}$ مماس مشترك ∴ $\overleftrightarrow{من} \perp \overline{أب}$

∴ $\overline{أب}$ هو ارتفاع △ م ن ب

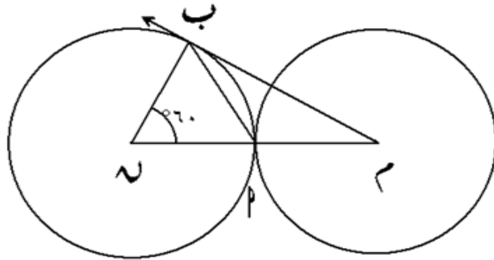
∴ م △ = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع = ٢٤ ∴ $\frac{١}{٢}$ × م ن × أ ب = ٢٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ × أ ب = ٢٤ ∴ ٢ أ ب = ٢٤ ∴ أ ب = ١٢سم



[١٧] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متطابقتان ومتماستان من الخارج فى أ ، رسم فى الدائرة ن نصف القطر $\overline{نب}$ ، بحيث ق(∠ أ ن ب) = ٦٠° **اثبت أن :** $\overline{مب}$ تمس الدائرة ن عند ب



∵ ن ب = ن أ = نق ∴ △ ن أ ب متساوى الساقين

∵ ق(∠ ن) = ٦٠° ∴ △ ن أ ب متساوى الأضلاع

∴ أ ب = نق ∵ الدائرتان م ، ن متطابقتان

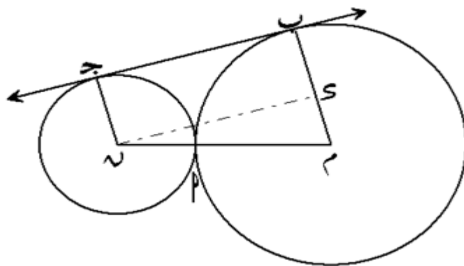
∴ م أ = ن أ = نق

∴ أ ب = ن أ = ن أ ∴ أ منتصف $\overline{م ن}$ $\overline{أ ب}$ متوسط فى △ م ب ن

∵ أ ب = $\frac{1}{2}$ م ن ∴ ق(∠ م ب ن) = ٩٠°

[١٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند أ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس مشترك لهما فإذا كان طولا نصفى قطريهما ١٨سم ، ٨سم على الترتيب أوجد مساحة سطح الشكل م ب جـ ن



العمل نرسم $\overline{ن د}$ ⊥ $\overline{ب م}$

∵ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن

∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overline{ن جـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ $\overline{ن جـ}$ // $\overline{د ب}$

∵ $\overline{ن د}$ ⊥ $\overline{ب م}$ ∴ الشكل ب د ن جـ مستطيل ∴ ن جـ = ب د = ٨سم

∴ م د = ١٨ – ٨ = ١٠سم ∵ ن أ + م أ = ٨ + ١٨ = ٢٦سم

فى △ ن د م القائم فى د

∴ (د ن)^2 = (م ن)^2 – (م د)^2 = (٢٦)^2 – (١٠)^2 = ٥٧٦ – ١٠٠ = ٤٧٦

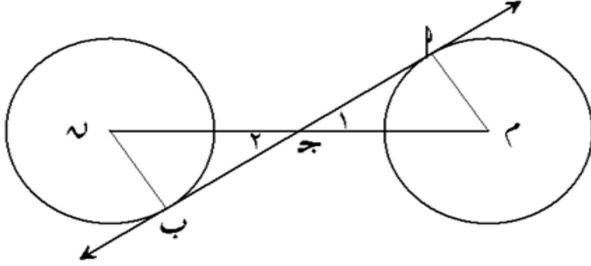
∴ د ن = $\sqrt{٤٧٦}$ = ٢٤ سم ∵ ب جـ = د ن من خواص المستطيل

∴ ب جـ = ٢٤سم

[١٩] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتان م ، ن عند أ ، ب

برهن أن : جـ منتصف كلا من $\overline{أب}$ ، $\overline{من}$



∵ م ، ن دائرتان متطابقتان ∴ م أ = ن ب = نق

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك

∵ $\overline{مأ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق(∠ أ) = ٩٠°

∵ $\overline{نب} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق(∠ ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ∴ ق(∠ م) = ق(∠ ن)

∵ فى △△ جـ م أ ، جـ ن ب

(١) ق(∠ م) = ق(∠ ن)

(٢) ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠°

(٣) م أ = ن ب = نق

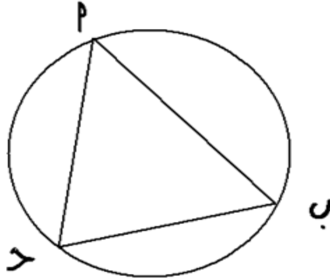
∴ △△ ≡ وينتج أن : أ جـ = ب جـ م جـ = ن جـ

∴ جـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ جـ منتصف $\overline{من}$



الدائرة الخارجة للمثلث

الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث



مركز الدائرة الخارجة للمثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع (تلاقى) محاور تماثل أضلاعة أو الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث

١ مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد الزوايا تقع داخل المثلث .

٢ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث .

٣ مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية تقع فى منتصف وتره .

٤ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة و هى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته

نظرية

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها

نتيجة : الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز

عكس النظرية

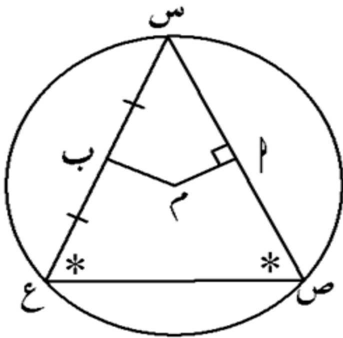
فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول



[١] فى الشكل المقابل

△ س ص ع مرسوم داخل دائرة م فيه ق(∠ ص) = ق(∠ ع)

، ؟ منتصف س ص ، م ب ⊥ س ع أثبت أن : م ؟ = م ب



فى △ س ص ع

∵ ق(∠ ص) = ق(∠ ع)

∴ △ س ص ع متساوى الساقين

∴ س ص = س ع

∵ م ب منتصف س ع ∴ م ب ⊥ س ع

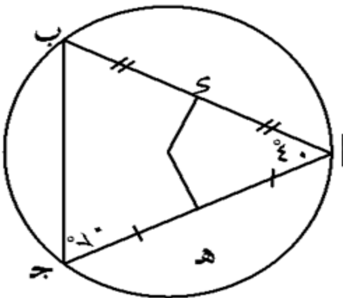
∵ م ؟ ⊥ س ص

∵ س ص = س ع ∴ م ؟ = م ب

[٢] فى الشكل المقابل

ق(∠؟) = ٤٠° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° ، ء منتصف ؟ ب ، هـ منتصف ؟ جـ

احسب ق (∠ ء م هـ) برهن أن : م ء = م هـ .



فى △ ؟ ب جـ :

∵ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٠°) = ٧٠°

∴ ق(∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٧٠°

∴ △ ؟ ب جـ متساوى الساقين

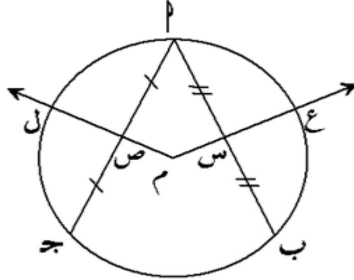
∴ ؟ ب = ؟ جـ

∵ ء منتصف ؟ ب



[٣] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، حيث س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب .
رسم $\overleftarrow{م س}$ ، $\overleftarrow{م ص}$ يقطعان الدائرة فى ع ، ل على الترتيب اثبت أن س ع = ص ل



∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

∵ أ ب = أ جـ

∴ م ص = م س

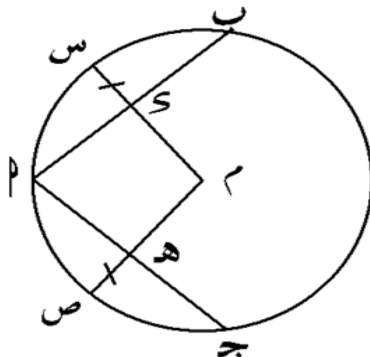
∵ م ع = م ل = نق

∴ م ع − م س = م ل − م ص

∴ ع س = ل ص

[٤] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران فى دائرة م ، حيث ء ، هـ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ ، على الترتيب ، $\overleftarrow{م هـ}$ ، $\overleftarrow{م ء}$ يقطعان الدائرة فى ص ، س على الترتيب بحيث ء س = هـ ص ، اثبت أن أ ب = أ جـ



∵ م س = م ص = نق ∵ ء س = هـ جـ

∴ م س − ء س = م ص − هـ ص

∴ م ء = م هـ ∵ ء منتصف $\overline{أ ب}$

∵ هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

∵ م ء = م هـ

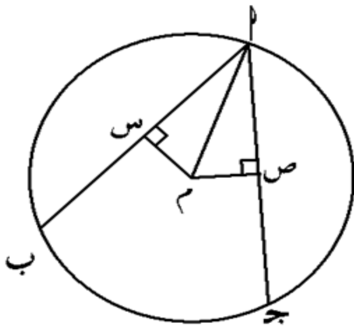
∴ أ ب = أ جـ



[٥] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{أجـ}$

اثبت أن : ق(∠ س أ م) = ق(∠ ص أ م)



∵ $\overline{مص} \perp \overline{أجـ}$ ∵ $\overline{مس} \perp \overline{أجـ}$

∵ أب = أجـ ∴ م س = م ص

∵ فى △△ أ م س ، أ م ص فيهما

(١) م ص = م س

(٢) ق(∠ م ص أ) = ق(∠ م س أ) = ٩٠°

(٣) $\overline{أم}$ ضلع مشترك

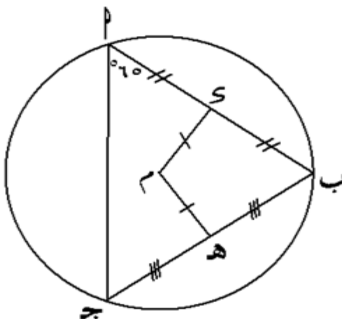
∴ △△ ≡ وينتج أن :

∴ ق(∠ س أ م) = ق(∠ ص أ م)

[٦] فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ أ) = ٦٥° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ على الترتيب

م ء = م هـ اثبت أن : ق(∠ ب)



∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ∵ $\overline{مهـ} \perp \overline{بجـ}$

∵ م ء = م هـ

∴ أ ب = ب جـ

∴ أ ب جـ متساوى الساقين

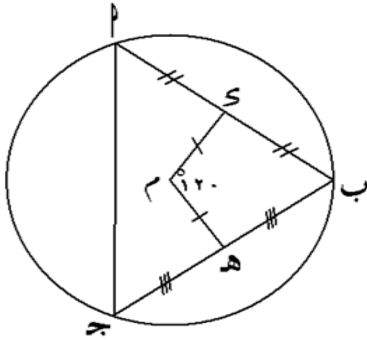
∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ) = ٦٥°

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°



[٧] فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠م) = ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ على الترتيب
م ء = م هـ اثبت أن : △ أ ب جـ متساوى الأضلاع



∵ ء منتصف $\overline{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

∴ ق(∠ب ء م) = ق(∠ب هـ م) = ٩٠°

∴ ق(∠ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∵ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∵ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

∵ م ء = م هـ ∴ أ ب = ب جـ

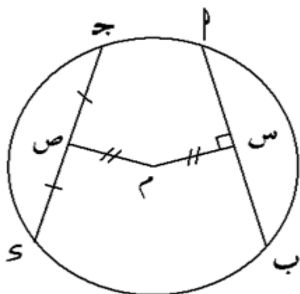
∴ △ أ ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) = ٦٠°

∴ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

[٨] فى الشكل المقابل

م دائرة ، $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـء}$ ، م س = م ص ، أ ب = ٧سم احسب طول $\overline{ءص}$



∵ ص منتصف $\overline{جـء}$

∴ $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{جـء}$

∵ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$

∵ م س = م ص ∴ أ ب = جـ ء = ٧سم

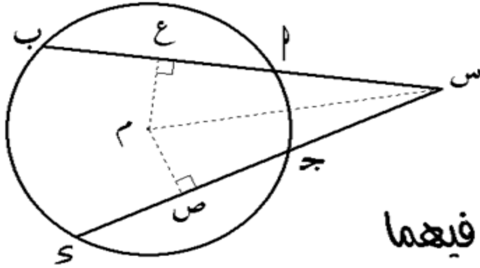
∵ ء ص = $\frac{١}{٢}$ جـ ء = ٣,٥



[٩] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م وغير متقاطعان ، فإذا كان $\overleftrightarrow{ب أ} \cap \overleftrightarrow{ء جـ} = \{ س \}$

اثبت أن : س أ = س جـ



العمل نرسم $\overline{م ع} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

∵ $\overline{م ع} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

∵ أ ب = جـ ء

∴ م ص = م ع ∵ فى △△ س م ص ، س م ع فيهما

(١) $\overline{م س}$ ضلع مشترك

(٢) م ص = م ع

(٣) ق(∠ س ع م) = ق(∠ س ص م) = ٩٠°

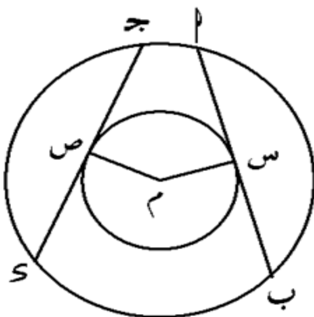
∴ △△ ≡ وينتج أن : س ع = س ص

∵ أ ب = جـ ء ∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ جـ ء ∴ جـ ص = أ ع

∴ أ ع − أ ع = س ص − جـ ص ∴ س أ = س جـ

[١٠] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب . اثبت أن : أ ب = جـ ء



∵ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ مماسان للدائرة الصغرى

∴ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ∵ $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

∵ م س = م ص = نق الصغرى

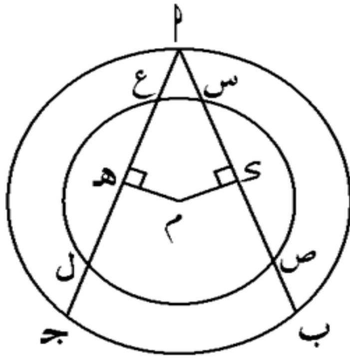
∴ فى الدائرة الكبرى ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ∴

∵ $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$ ∵ م س = م ص = نق ∴ أ ب = جـ ء



[١١] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب = أ جـ ، م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ أثبت أن : س ص = ع ل



∵ فى الدائرة الكبرى

∵ م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ م ء = م هـ

∵ فى الدائرة الصغرى

∵ م ء ⊥ س ص ، ∵ م هـ ⊥ ع ل

∵ م ء = م هـ

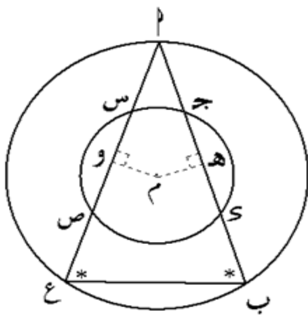
∴ س ص = ع ل

[١٢] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتى المركز م، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء على الترتيب

أ ع وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب

فإذا كان : ق(∠ أ ب ع) = ق(∠ أ ع ب) أثبت أن : جـ ء = س ص



فى △ أ ب جـ :

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ ع)

∴ △ أ ب ع متساوى الساقين

∴ أ ب = أ ع

∵ م هـ ⊥ أ ب ، م و ⊥ أ ع

∴ م هـ = م و

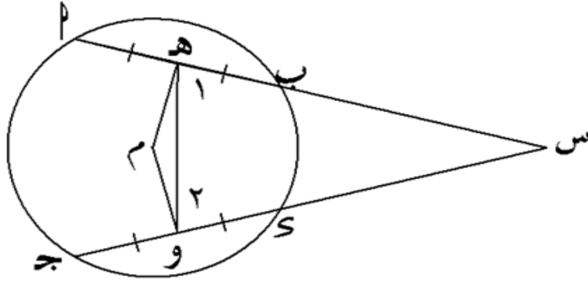
∵ فى الدائرة الصغرى :

∵ م هـ ⊥ جـ ء ∵ م و ⊥ س ص

∵ م هـ = م و ∴ جـ ء = س ص

[١٣] فى الشكل المقابل

م دائرة ، م ب = م جـ ، هـ ، و منتصفا $\overline{م ب}$ ، $\overline{جـ ء}$. اثبت أن : △ س هـ و متساوي الساقين



∵ هـ منتصف $\overline{م ب}$ ∵ و منتصف $\overline{ء جـ}$

∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{م ب}$ ∵ $\overline{م و}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

∵ م ب = جـ ء ∴ م و = م هـ

∴ △ م ء هـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ م و هـ) = ق(∠ م هـ و)

∵ ∠ م و هـ تتمم ∠ ٢

، ∠ م هـ و تتمم ∠ ١

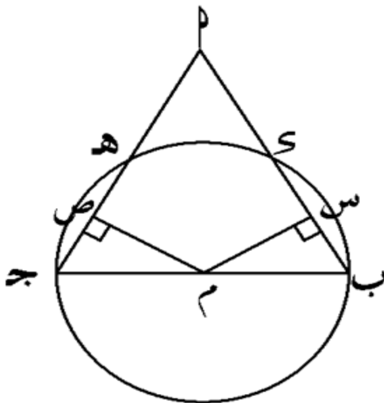
∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ∴ س هـ = س و

∴ △ س هـ و متساوي الساقين

[١٤] فى الشكل المقابل

△ م ب جـ فيه $\overline{ب جـ}$ قطر فى دائرة م ، م ب = م جـ ، رسم $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{م جـ}$

اثبت أن : ب ء = جـ هـ



∵ △ △ م س ب ، م ص جـ فيهما :

① م ب = م جـ = نق

② ق(∠ م س ب) = ق(∠ م ص جـ) = ٩٠°

③ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) لأن : م ب = م جـ

∴ △ م س ب ≡ △ م ص جـ وينتج أن :

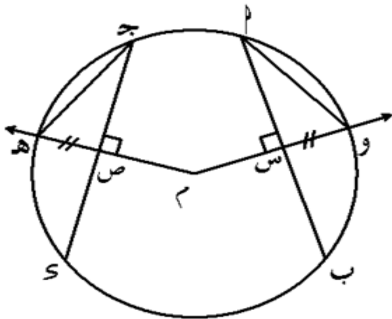
م س = م ص

∵ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{ب ء}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ هـ}$

∴ ب ء = جـ هـ

[١٥] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى دائرة م ، $\overleftarrow{م س} \perp \overline{أب}$ ويقطع الدائرة فى و ، $\overleftarrow{م ص} \perp \overline{جـ ء}$ ويقطع الدائرة فى هـ ، وس = هـ ص أثبت أن : ① أ ب = جـ ء ② أ و = جـ هـ



∵ و س = هـ م = نق ∵ و س = هـ ص

∴ م س = م ص

∵ $\overleftarrow{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overleftarrow{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

∴ أ ب = جـ ء

∵ $\overleftarrow{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overleftarrow{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$ ∴ $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ جـ ء ∴ أ س = جـ ص

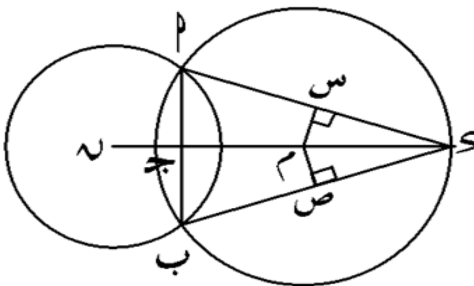
فى △△ أ س و ، جـ ص هـ :

① أ س = جـ ص ② س و = ص هـ ③ ق(∠ أ س و) = ق(جـ ص هـ) = ٩٠°

△△ وينتج أن : أ و = جـ هـ

[١٦] فى الشكل المقابل

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، $\overline{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{م ن}$ = { جـ } ، ء ∈ المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ ، $\overline{م س} \perp \overline{أ ء}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{ء ب}$ أثبت أن : م س = م ص



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ، $\overline{أب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أب}$ ، جـ منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ محور تماثل $\overline{أب}$

∴ ء أ = ء ب ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أ ء}$

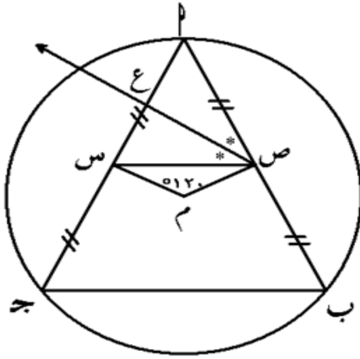
∵ $\overline{م ص} \perp \overline{ء ب}$

∵ ء أ = ء ب ∴ م س = م ص



[١٧] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، س ، ص منتصفا هما على الترتيب
، ق (∠ س م ص) = ١٢٠° ، $\overleftarrow{صع}$ ينصف (∠ أ ص س) اثبت أن : $\overleftarrow{صع}$ // $\overline{مس}$



∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أجـ}$

∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{أجـ}$

∵ أب = أجـ ∴ م س = م ص

∴ ق (∠ م ص س) = ق (∠ م س ص)

$= \frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢} = \frac{٦٠°}{٢} = ٣٠°$

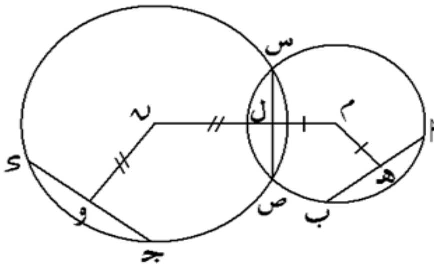
∴ ق (∠ ع ص س) = ق (أ ص ع) $= \frac{٩٠° - ٣٠}{٢} = \frac{٦٠°}{٢} = ٣٠°$

∴ ق (∠ ع ص س) = ق (∠ م س ص) = ٣٠° وهما فى وضع تبادل

∴ $\overleftarrow{صع}$ // $\overline{مس}$

[١٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى س ، ص ، $\overline{مهـ} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{نو} \perp \overline{جـ ء}$
، م هـ = م ل ، ن و = ن ل اثبت أن أب = جـ ء



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين $\overline{أب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{س ص}$ ∴ $\overline{م ل} \perp \overline{س ص}$

∵ $\overline{مهـ} \perp \overline{أب}$

∵ م هـ = م ل ∴ أب = س ص .... ❶

بالمثل ∵ $\overline{ن ل} \perp \overline{س ص}$ ∵ $\overline{ن و} \perp \overline{جـ ء}$ ∵ ن ل = ن و

∴ س ص = جـ ء .... ❷ من ❶ ، ❷

∴ أ ب = جـ ء



[١٩] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ على الترتيب . رسم المستقيم س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و ، رسم ل $\overline{م}$ ⊥ المستقيم $\overleftrightarrow{س ص}$

اثبت أن : س هـ = ص و

نرسم $\overline{م س}$ ، $\overline{م ص}$

ونرسم $\overline{م ع}$ ⊥ $\overleftrightarrow{س ص}$ فيقطعه فى ع

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$

∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

∵ أب = جـ ء ∴ م س = م ص

∴ △ م س ص فيه :

م س = م ص ، $\overline{م ع}$ ⊥ $\overline{س ص}$

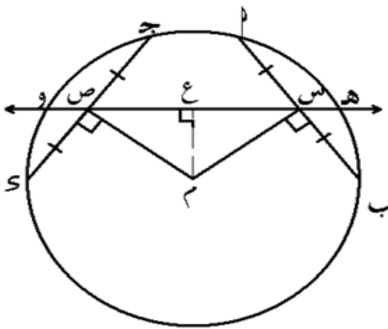
∴ س ع = ص ع .... (١)

∵ $\overline{م ع}$ ⊥ $\overline{و هـ}$

∴ ع هـ = ع و .... (٢)

بالطرح ∴ ع هـ − س ع = ع و − ص ع

∴ س هـ = ص و



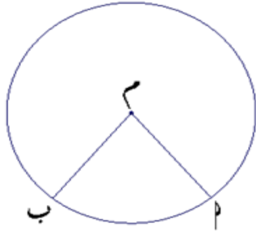
الزوايا والأقواس

القوس

هو جزء من الدائرة محدد بنقطتى البادية والنهاية ينتميان للدائرة

ويرمز له بالرمز ⌢أ ب

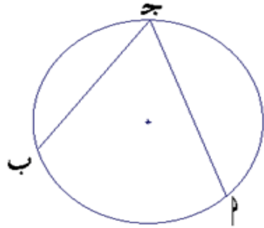
الزاوية المركزية



هى زاوية تقع رأسها فى مركز الدائرة وكل من ضلعيها نصفى قطر للدائرة

(∠ أ م ب) زاوية مركزية

الزاوية المحيطية



هى زاوية تقع رأسها على الدائرة وكل من ضلعيها وترين للدائرة

(∠ أ جـ ب)زاوية محيطية

العلاقة بين الزوايا والأقواس

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التى تحصره (المقابلة له)

ق (⌢أ ب) = ق (∠ أ م ب) المركزية

قياس القوس = ٢ قياس الزاوية المحيطية التى تحصره (المقابلة له)

ق (⌢أ ب) = ٢ ق (∠ أ جـ ب) المحيطية

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس القوس المقابل لها

ق (∠ أ جـ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (⌢أ ب)

قياس الدائرة = ٣٦٠ °

قياس أي جزء من الدائرة = الجزء × ٣٦٠ °



① قياس $\frac{١}{٢}$ دائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠ = ١٨٠°

② قياس $\frac{١}{٣}$ دائرة = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠ = ١٢٠°

③ قياس $\frac{١}{٤}$ دائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠ = ٩٠°

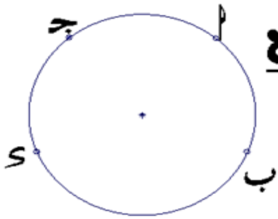
نتائج هامة على الزوايا والأقواس

فى الدائرة الواحدة (الدوائر المتطابقة)

① الأقواس المتساوية فى القياس **تكون متساوية فى الطول والعكس صحيح**

ق (⌒أب) = ق (⌒جـ ء)

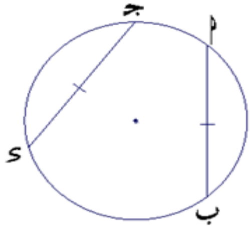
طول (⌒أب) = طول (⌒جـ ء)



② الوتران المتساويان يحصران قوسان **متساويان فى القياس**

أب = جـ ء

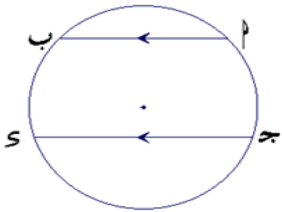
ق (⌒أب) = ق (⌒جـ ء)



③ الوتران المتوازيان يحصران بينهما قوسان **متساويان فى القياس**

$\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

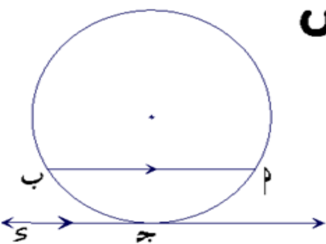
ق (⌒أجـ) = ق (⌒ب ء)



④ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازية يكونان **متساويان فى القياس**

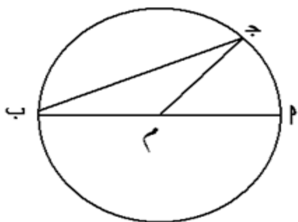
$\overline{\text{أب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$

ق (⌒أجـ) = ق (⌒ب جـ)



نظرية

① قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس





❷ قياس الزاوية المركزية = ٢ قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس

❸ ق (∠ ﺃ ب جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ﺃ م ب) المركزية لأنهما يحصران القوس (ﺃ جـ)

❹ ق (∠ ﺃ م ب) المركزية = ٢ ق (∠ ﺃ ب جـ) المحيطية لأنهما يحصران القوس (ﺃ جـ)

❺ قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

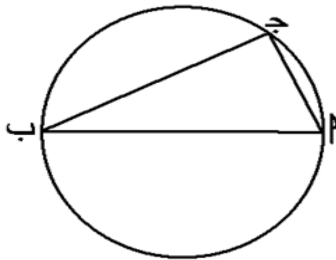
❻ قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

❼ الزاوية المحيطية المقامة فى نصف دائرة قائمة (قياسها = ٩٠°)

❽ النسبة بين قياس المحيطية وقياس المركزية المشتركة معها فى القوس = ١ : ٢

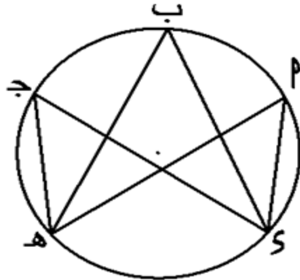
❾ النسبة بين قياس المركزية وقياس المحيطية المشتركة معها فى القوس = ٢ : ١

نتيجة



الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة

$\overline{ﺃب}$ قطر ق (∠ ﺃ جـ ب) = ٩٠°



نظرية

فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

❶ الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس متساوية فى القياس

❷ الزوايا المحيطية التى تحصر أقواس متساوية فى القياس (الطول) تكون متساوية فى القياس

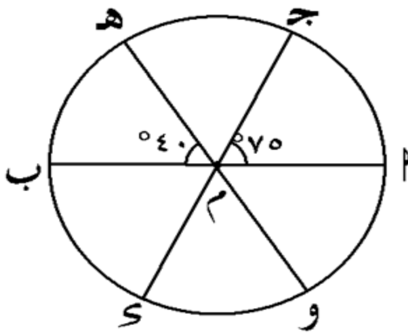
❸ الزوايا المحيطية التى تقابل أقواس متساوية فى القياس (الطول) تكون متساوية فى القياس

ق (∠ ﺃ) = ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) لأنهما يحصران (هـ ء)

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت أب ، جـ ء ، هـ و أقطار فى الدائرة م أوجد

❶ ق(أ جـ) ❷ ق(أ جـ هـ) ❸ ق(أ جـ ء) ❹ ق(أ و هـ)



ق(∠ ء م ب) = ق(∠ أ م جـ) = ٧٥°

∴ ق(أ جـ) = ق(ء ب) = ٧٥°

ق(أ م و) = ق(∠ هـ م ب) = ٤٠°

∴ ق(أ و) = ق(هـ ب) = ٤٠°

ق(∠ جـ م هـ) = ق(∠ و م ء) = ١٨٠ – [٧٥° + ٤٠°] = ١٨٠° – ١١٥° = ٦٥°

∴ ق(جـ هـ) = ق(و ء) = ٦٥°

ق(أ جـ هـ) = ق(أ جـ) + ق(جـ هـ) = ٧٥° + ٦٥° = ١٤٠°

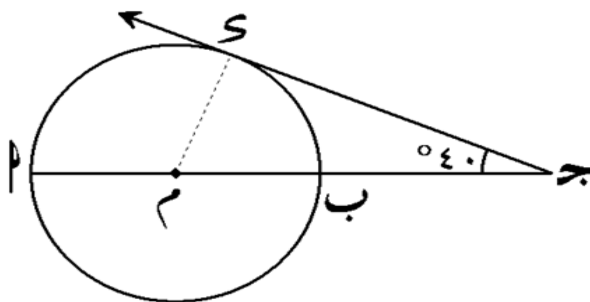
ق(أ جـ ء) = ق(أ جـ) + ق(جـ ء) = ٧٥° + ١٨٠° = ٢٥٥°

ق(أ و هـ) = ق(أ ب) + ق(ب هـ) = ١٨٠° + ٤٠° = ٢٢٠°

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان جـ ء مماس للدائرة م عند ء احسب : ق(أ ء) ، طول(أ ء)

جـ ء مماس ⟸ م ء ⊥ جـ ء



∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠°

ق(∠ ء م جـ) = ١٨٠° – (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

ق(ب ء) = ق(∠ ء م جـ) = ٥٠°

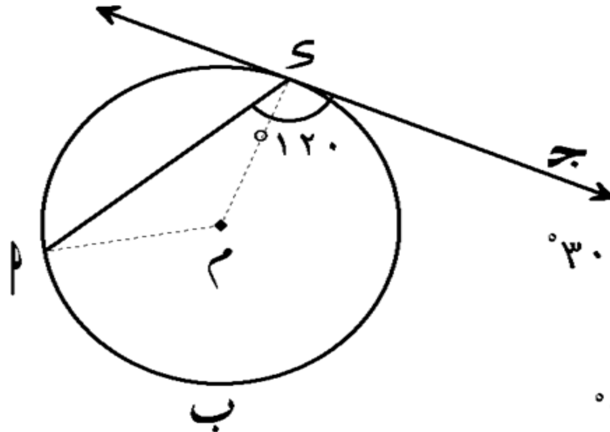
ق(أ ء) = ١٨٠° – ٥٠° = ١٣٠°

طول القوس = $\frac{١٣٠}{٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{١٣}{٣٦}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٥٫٨٩ سم

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة م عند ء ، ق(∠ م ء جـ) = ١٢٠° احسب ق(⌒ أ ب ء)

الحل العمل ، نصل $\overline{م ء}$ ، $\overline{م أ}$



$\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس ∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ ء م) = ١٢٠° – ٩٠° = ٣٠°

م ء = م أ ∴ ق(∠ م أ ء) = ٣٠°

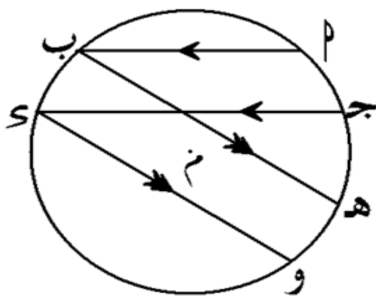
∴ ق(∠ ء م أ) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ م ء) المنعكسة = ٣٦٠° – ١٢٠° = ٢٤٠°

∴ ق(⌒ أ ب ء) = ٢٤٠°

(٤) فى الشكل المقابل :

فى الدائرة م : $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ ب}$ // $\overline{و ء}$ برهن أن : ق(⌒ أ جـ) = ق(⌒ هـ و)



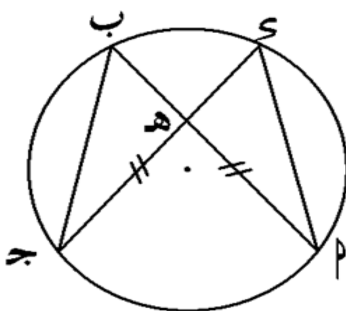
∵ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ∴ ق(⌒ أ جـ) = ق(⌒ ب ء) .... (١)

∵ $\overline{هـ ب}$ // $\overline{و ء}$ ∴ ق(⌒ هـ و) = ق(⌒ ب ء) .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق(⌒ أ جـ) = ق(⌒ هـ و)

(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول ، $\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { هـ } أثبت أن : أ ء = ب جـ



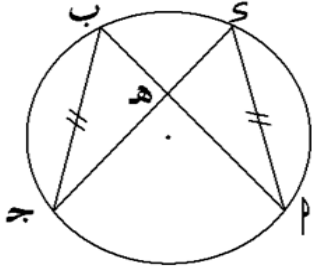
الحل ∵ أ ب = جـ ء ∴ ق(⌒ أ ء ب) = ق(⌒ جـ ب ء)

∴ بحذف ق(⌒ ب ء) للطرفين

∴ ق(⌒ أ ء) = ق(⌒ ب جـ) ∴ أ ء = ب جـ

(٦) في الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء وتران في الدائرة ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ، أ ء = ب جـ أثبت أن : أ ب = جـ ء



الحل

∵ أ ء = ب جـ ∴ ق (أ ء⌒) = ق (ب جـ⌒)

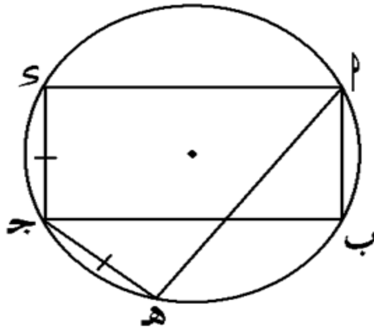
∴ بإضافة ق (ب ء⌒) للطرفين

∴ ق (أ ء ب⌒) = ق (جـ ب ء⌒) ∴ أ ب = جـ ء

(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة رسم الوتر جـ هـ بحيث جـ هـ = جـ ء أثبت أن أ هـ = ب جـ

الحل



∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ أ ب = ء جـ ....(١)

∵ جـ هـ = جـ ء ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ∴ أ ب = جـ هـ

∴ ق (أ ب⌒) = ق (جـ هـ⌒) بإضافة ق (ب هـ⌒) للطرفين

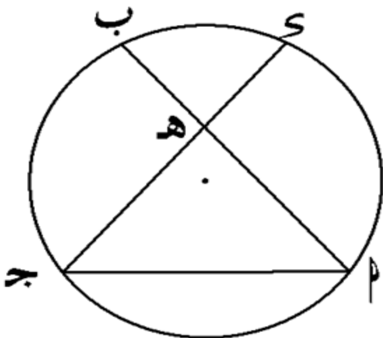
∴ ق (أ ب⌒) + ق (ب هـ⌒) = ق (جـ هـ⌒) + ق (ب هـ⌒)

∴ ق (أ ب هـ⌒) = ق (ب هـ جـ⌒) ∴ أ هـ = ب جـ

(٨) في الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء وتران متساويان في الطول ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ }

أثبت أن : المثلث أ جـ هـ متساوى الساقين



الحل

أ ب = جـ ء ∴ ق (أ ء ب⌒) = ق (جـ ب ء⌒)

∴ ق(∠ جـ) = ق (∠ أ)

∴ هـ أ = هـ جـ ∴ △ هـ أ جـ متساوى الساقين

(٩) فى الشكل المقابل :

أ ب ، ء جـ وتران فى دائرة م متقاطعان فى هـ فإذا كان أ هـ = جـ هـ

أثبت أن : ق(أ جـ ب) = ق(جـ أ ء)

الحـــل

فى △ هـ أ جـ   هـ أ = هـ جـ

∴ ق(∠ هـ أ جـ) = ق(∠ هـ جـ أ)

∴ ق(جـ ب⌒) = ق(أ ء⌒)   بإضافة ق(ء ب⌒) للطرفين

ق(جـ ب⌒) + ق(ء ب⌒) = ق(أ ء⌒) + ق(ء ب⌒)

∴ ق(جـ ب ء⌒) = ق(أ ء ب⌒)

∴ ق(أ جـ ب) = ق(جـ أ ء)

(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ء ، ب هـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة   أ ء ∩ ب هـ = { جـ } أثبت أن جـ ء = جـ هـ

الحـــل

أ ء = هـ ب   ∴ ق(أ ء⌒) = ق(هـ ب⌒)   بإضافة ق(ء هـ⌒) للطرفين

∴ ق(أ ء⌒) + ق(ء هـ⌒) = ق(هـ ب⌒) + ق(ء هـ⌒)

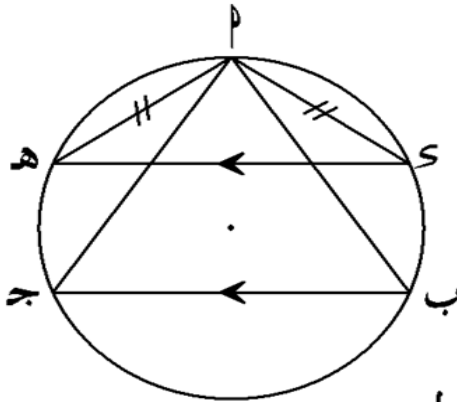
∴ ق(أ هـ⌒) = ق(ء ب⌒)

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ أ)   ∴ جـ أ = جـ ب

∴ جـ أ − أ ء = جـ ب − هـ ب   جـ ء = جـ هـ

(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = أ هـ أثبت أن △ أ ب جـ متساوى الساقين



الحل

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ق (⌒ء ب) = ق (⌒جـ هـ) ....(١)

∵ أ ء = أ هـ

∴ ق (⌒أ ء) = ق (⌒أ هـ) ....(٢)   بجمع (١) ، (٢)

∴ ق (⌒أ ء جـ) = ق (⌒أ هـ جـ)   ∴ أ ب = أ جـ

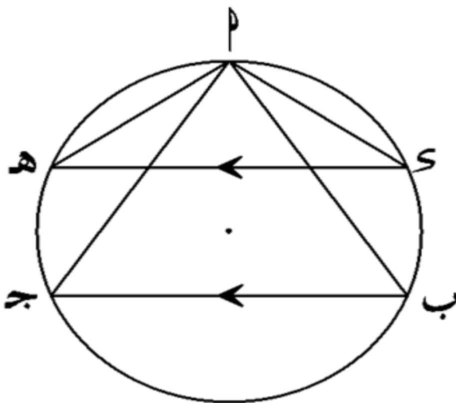
∴ △ أ ب جـ متساوى الساقين

(١٢) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ أثبت أن ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ب أ هـ)

الحل

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$



∴ ق (⌒ء ب) = ق (⌒جـ هـ) . بإضافة ق (⌒ب جـ) للطرفين

ق (⌒ء ب) + ق (⌒ب جـ) = ق (⌒جـ هـ) + ق (⌒ب جـ)

∴ ق (⌒ء ب جـ) = ق (⌒ب جـ هـ)

∴ ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ب أ هـ)

(١٣) فى الشكل المقابل :

ب جـ مماس للدائرة م عند ب ، ب جـ // أ ء ، ب هـ // أ جـ أثبت أن : △ ب جـ ء متساوى الساقين .

البرهان ∵ ب جـ // أ ء

∴ ق(⌒أ ء) = ق(⌒جـ ء) ....(١)

∵ ب هـ // أ جـ

∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒ب جـ) ....(٢) من (١) ، (٢)

∴ ق(⌒جـ ء) = ق(⌒ب جـ)

∴ ء جـ = ب جـ   ∴ △ ب جـ ء متساوى الساقين

(١٤) فى الشكل المقابل :

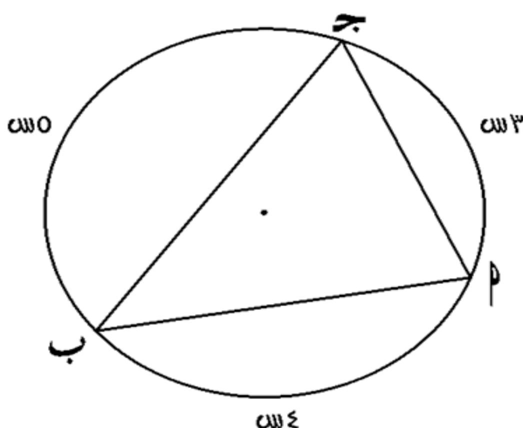
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م، ق(⌒أ ب) : ق(⌒ب جـ) : ق(⌒أ جـ) = ٤ : ٥ : ٣ أوجد ق(∠ أ جـ ب)

∵ ق(⌒أ جـ) = ٣ س ، ∵ ق(⌒ب جـ) = ٥س ، ∵ ق(⌒أ ب) = ٤س

قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(⌒أ جـ) + ق(⌒أ ب) + ق(⌒جـ ب) = ٣٦٠°

∴ ٣ س + ٤ س + ٥ س = ٣٦٠°

∴ ١٢ س = ٣٦٠°   ∴ س = $\frac{٣٦٠}{١٢}$ = ٣٠°



∴ ق(⌒أ ب) = ٤ × ٣٠ = ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒أ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠

(١٥) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(⌒أ ء) = ق(⌒ء جـ) ، ق(∠ أ ب جـ) = ٤٠ أوجد ق(∠ ب أ ء)

الحـــــل

ق(∠ ب) = ٤٠° ∴ ق(⌒أ ء جـ) = ٨٠

ق(⌒أ ء) = ق(⌒ء جـ) ∴ ق(⌒ء جـ) = ٤٠°

أ ب قطر ∴ ق(⌒أ ب) = ١٨٠°

∴ ق(⌒ء جـ ب) = ١٨٠° — ق(⌒أ ء)

ق(⌒ء جـ ب) = ١٨٠° — ٤٠° = ١٤٠°

ق(∠ ب أ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ء جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠° = ٧٠°

(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ هـ جـ) = ٣٠° ق(⌒أ جـ) = ٨٠° ، أوجد ق(⌒جـ ء)

الحـــــل ∵ ق(⌒أ جـ) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ م جـ) المركزية = ق(⌒أ جـ) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ م جـ) الخارجة = ق(∠ جـ) + ق(∠ هـ)

∴ ق(∠ جـ) = ٨٠ — ٣٠ = ٥٠°

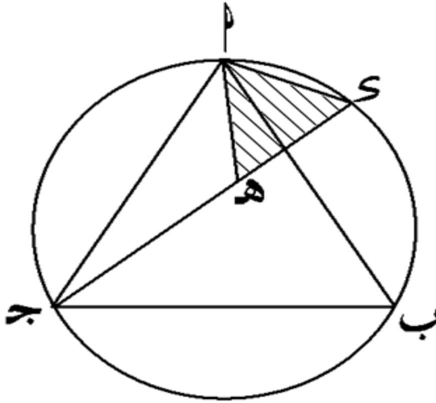
∵ م جـ = م ء = نق ∴ ق(⌒ء جـ) = ق(∠ جـ) = ٥٠°

∴ ق(∠ جـ م ء) المركزية = ١٨٠ — (٥٠ + ٥٠) = ١٨٠ — ١٠٠ = ٨٠°

∴ ق(⌒جـ ء) = ق(∠ جـ م ء) = ٨٠°

(١٧) فى الشكل المقابل :

ﺃ ب ﺟ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة بحيث ﺃ ء = ء ﻫ أثبت أن : △ ﺃ ء ﻫ متساوى الأضلاع



△ ﺃ ب ﺟ متساوى الأضلاع

∴ ﺃ ب = ب ﺟ = ﺃ ﺟ

∴ ق(⌒ﺃ ب) = ق(⌒ب ﺟ) = ق(⌒ﺃ ﺟ) = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

ق(∠ ﺃ ء ﻫ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ﺃ ﺟ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠°

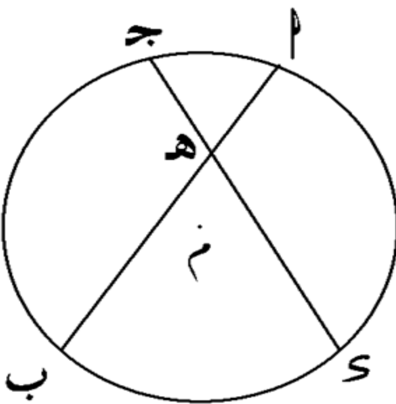
فى △ ﺃ ء ﻫ ﺃ ء = ء ﻫ

∴ ق(∠ ء ﺃ ﻫ) = ق(∠ ء ﻫ ﺃ) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

△ ﺃ ء ﻫ متساوى الاضلاع

(١٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ﺃ ب}}$ ∩ $\overline{\text{ﺟ ء}}$ = { ﻫ } ، ﺃ ب = ﺟ ء أثبت أن : ﻫ ﺃ = ﻫ ﺟ



∵ ﺃ ب = ﺟ ء .... (١)

∴ ق(⌒ﺃ ب) = ق(⌒ﺟ ء) بحذف ق(⌒ﺃ ﺟ) من الطرفين

∴ ق(⌒ب ﺟ) = ق(⌒ﺃ ء)

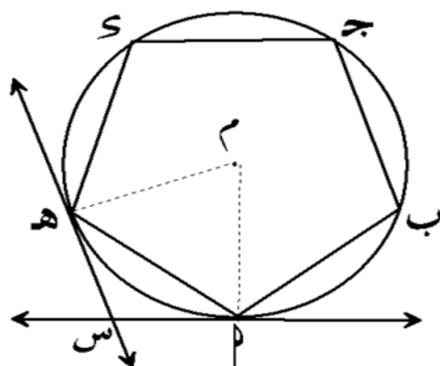
∵ ق(∠ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ب ﺟ) ، ق(∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ﺃ ء)

∴ ق(∠ ء) = ق(∠ ب) ∴ ﻫ ب = ﻫ ء وبطرح (٢) من (١)

∴ ﻫ ﺃ = ﻫ ﺟ

(١٩) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ ،
$\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}} = \{\text{س}\}$
أوجد : ❶ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) ❷ ق(∠ أ س هـ)



العمل : نرسم $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$

البرهان

∵ الشكل أ ب جـ ء هـ خماسى منتظم

∴ أ ب = ب جـ = جـ ء = ء هـ = أ هـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ٧٢°   ∴ ق(∠ أ م هـ) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ٧٢°

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة م ، م أ = نق   ∴ $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ س}}$

∴ ق(∠ م أ س) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة م ، م هـ = نق   ∴ $\overline{\text{م هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ س}}$

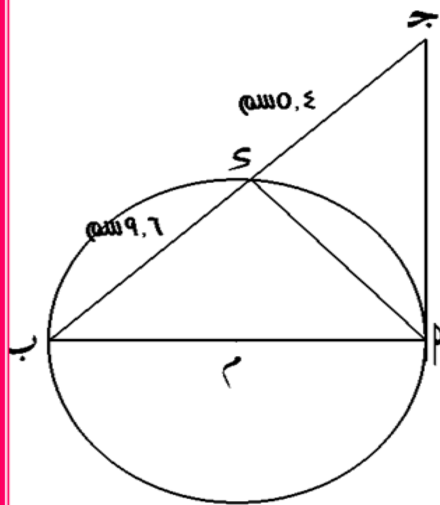
∴ ق(∠ م هـ س) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ أ س هـ) = ٣٦٠ – (٩ + ٩٠ + ٧٢) = ١٠٨°

(٢٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ تمسها عند أ ، $\overline{بجـ}$ تقطعها فى ء فإذا كان : ب ء = ٩,٦ سم
، ء جـ = ٥,٤ سم فأوجد طول نصف قطر الدائرة م



∵ $\overline{أجـ}$ تمس الدائرة عند أ ∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠° ∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∆ أ ب جـ قائم فى أ ∵ $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ من نظرية إقليدس

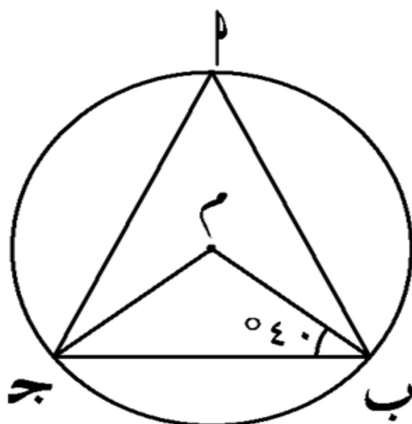
∴ (أ ب)^2 = ب ء × ب جـ = ٩,٦ (٩,٦ + ٥,٤) = ١٤٤

∴ أ ب = ١٢ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة م = ٦ سم

(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ∆ تمر برؤوسه الدائرة م ، ق(∠ م ب جـ) = ٤٠° احسب ق(∠ أ)



∵ م مركز الدائرة ∴ م ب = م جـ = نق

∴ ∆ م ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ م جـ ب) = ق(∠ م ب جـ) = ٤٠°

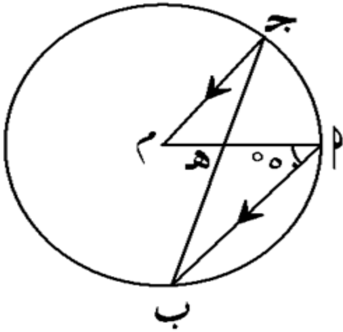
ق(∠ ب م جـ) = ١٨٠ – (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ – ٨٠ = ١٠٠°

∵ ∠ ب أ جـ المحيطية ، ∠ ب م جـ المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{بجـ}$

∴ ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م جـ) = ٥٠°

(٢٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أم} \parallel \overline{جب}$ ، ق(م ج ب) = ٥٠° احسب ❶ ق(∠ ب) ❷ ب هـ > أ هـ



∵ $\overline{أم} \parallel \overline{جب}$

ق(∠ ج) = ق(∠ م) = ٥٠° بالتبادل

∵ ∠ أ ب ج المحيطية ، ∠ أ م ج المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{أ ج}$

∴ ق(∠ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(م) المركزية

∴ ق(∠ ب) = ٢٥°   ∴ ق(∠ م) > ق(ب)

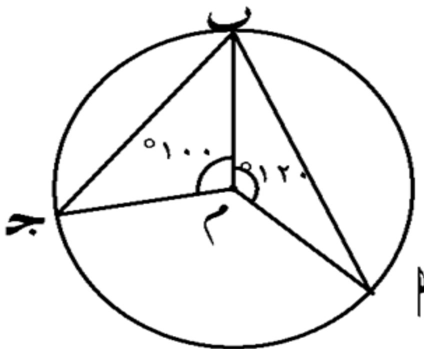
∵ ق(∠ ج) = ق(∠ م)

∵ فى △ هـ ب ج   ∴ ق(ج) > ق(ب)

∴ ب هـ > أ هـ

(٢٣) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$، $\overline{ج ب}$ وتران فى دائرة م بحيث ق(∠ أ م ب) = ١٢٠° ، ق(∠ ب م ج) = ١٠٠° أوجد : ق(∠ أ ب ج)



∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة واحدة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ أ م ج) = ٣٦٠ – (١٢٠ + ١٠٠) = ١٤٠°

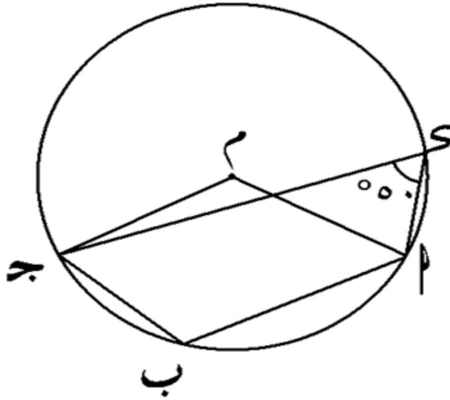
∵ ∠ أ ب ج المحيطية ، ∠ أ م ج المركزية مشتركتان ف $\overset{\frown}{أ ج}$

∴ ق(∠ أ ب ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ م ج) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠ = ٧٠°

(٢٤) فى الشكل المقابل :

النقط أ ، ب ، جـ ، ء تنتمى للدائرة م فإذا كان ق(∠ أ ء جـ) = ٥٠°

أوجد : ❶ ق(أ م جـ) ❷ ق(∠ أ ب جـ)



∵ ∠ أ ء جـ المحيطية ، ∠ أ م جـ المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

∴ ق(∠ أ ء جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م جـ)

∵ ق(∠ أ ء جـ) = ٥٠° ∴ ق(∠ أ م جـ) = ١٠٠°

∴ ق(أ م جـ) المنعكسة = ٣٦٠ − ١٠٠ = ٢٦٠°

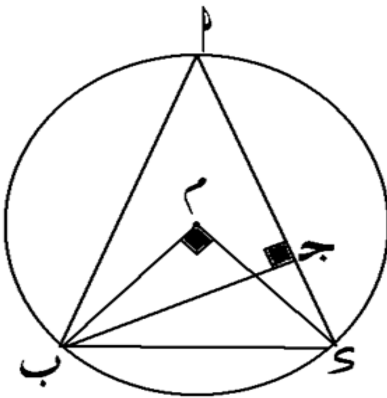
∵ ∠ أ ب جـ المحيطية ، ∠ أ م جـ المركزية المنعكسة مشتركتان ف $\overset{\frown}{\text{أ ء جـ}}$

∴ ق(أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ م جـ) المنعكسة ∴ ق(∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × ٢٦٠ = ١٣٠°

(٢٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ نصفا قطرين متعامدين فى الدائر م ، أ ∈ للدائرة م ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ تقطعها فى جـ

أثبت أن : ب جـ = أ جـ وإذا كان ق(∠ أ) = (٣س − ١٥)° أوجد قيم س



∵ ∠ ب م ء المركزية ، ∠ ب أ ء المحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$

∴ ق(∠ ب أ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ء) = $\frac{1}{2}$ × ٩٠ = ٤٥°

فى △ أ ب جـ

∵ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠° ∵ ق(∠ أ) = ٤٥°



∴ ق(∠ ا ب جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٥) = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

∴ ق(∠ ا) = ق(∠ ا ب جـ)

∴ ب جـ = ا جـ

∵ ق(∠ ا) = ٣س − ١٥ = ٤٥

∴ ٣س = ١٥ + ٤٥ = ٦٠

∴ س = $\frac{٦٠}{٣}$ ∴ س = ٢٠°

[٢٦] فى الشكل المقابل :

ا ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، ب جـ ∩ ا ء = {و} ، $\overleftarrow{ا ب}$ ∩ $\overleftarrow{جـ ء}$ = {هـ} ،
ق(∠ ب و ء) = ٨٠° ، ق(∠ ا م جـ) = ١٢٠° أوجد: ❶ ق(∠ ا ب جـ) ❷ ق(∠ هـ)

∵ ∠ ا ب جـ المحيطية ، ∠ ا م جـ المركزية مشتركتان فى $\frown{ا جـ}$

∴ ق(∠ ا ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ا م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ = ٦٠°

∵ ب ∈ $\overline{ا هـ}$

∴ ق(∠ هـ ب و) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∵ ∠ ا ء جـ المحيطية ، ∠ ا م جـ المركزية مشتركتان فى $\frown{ا جـ}$

∴ ق(ا ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ا م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ = ٦٠°

∴ ق(∠ هـ) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٢٠° + ٨٠°) = ٣٦٠° − ٣٢٠° = ٤٠°

(٢٧) فى الشكل المقابل :

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، $\overline{\text{ب ج}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ب د}}$ قطر فى الدائرة ن
اثبت أن : ج ، أ ، د على استقامة واحدة

∵ $\overline{\text{ب ج}}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق (∠ ب أ ج) = المحيطية = ٩٠° ....(١)

∵ $\overline{\text{ج د}}$ قطر فى الدائرة ن

∴ ق (∠ ب أ د) = ٩٠° ....(٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ ق (ب أ ج) + ق (ب أ د) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ ج ، أ ، د على استقامة واحدة

(٢٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ج م شكل رباعى فيه $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ج}}$ ، ق (∠ أ) = ٦٠° احسب ق (∠ ب)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ج}}$ ، $\overline{\text{أ م}}$ قاطع لهما

ق (∠ أ) + ق (∠ م) = ١٨٠°

∴ ق (∠ م) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

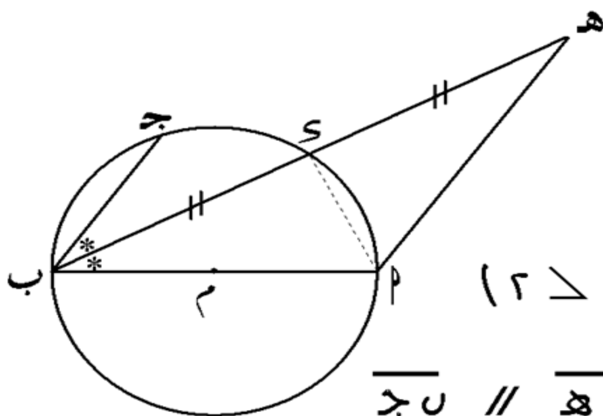
∴ ق (∠ أ م ج) المنعكسة = ٣٦٠ − ١٢٠ = ٢٤٠°

∵ ق (∠ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ أ م ج) المنعكسة يحصرا (أ⌒ج) الأكبر

∴ ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠ = ١٢٠°

(٢٩) فى الشكل المقابل :

أ ب فى الدائرة م ، ب ج وتر فيها ، رسم ب ء ينصف (∠ ب) ويقطع الدائرة فى ء ، حيث هـ ∈ ب ء ، ب ء = ء هـ أثبت أن : أ هـ // ب ج



∵ أ ب قطر فى الدائرة ∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∵ △ أ ب هـ فيه أ ء ⊥ ب هـ ، ∵ ب ء = ء هـ

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ هـ) ∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

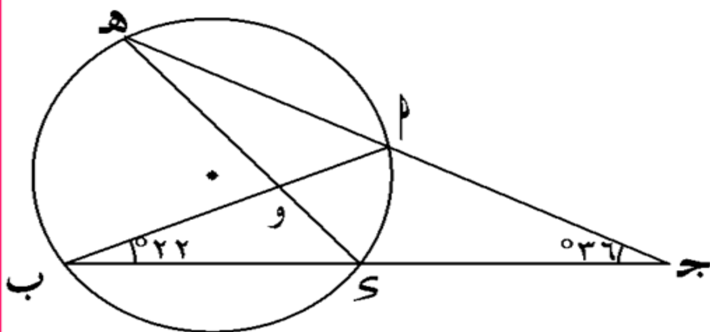
∴ ق(∠ هـ) = ق(∠ ٢) وهما فى وضع تبادل ∴ أ هـ // ب ج

∴ ق(∠ هـ ء و) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠° ∴ الشكل هـ ء و ب رباعى

∴ ق(∠ هـ) = ٣٦٠ – (١٢٠ + ١٢٠ + ٨٠) = ٢٤٠°

(٣٠) فى الشكل المقابل :

ج نقطة خارج دائرة ، أ ب ، ء هـ وتران فيها متقاطعان فى نقطة و بحيث : ق(ب) = ٢٢° ، ق(ج) = ٣٦° أوجد : ق(ب هـ⌒)



∵ ق(∠ أ ب ء) = ٢٢°

∴ ق(أ ء⌒) = ٢ ق(∠ أ ب ء) = ٤٤°

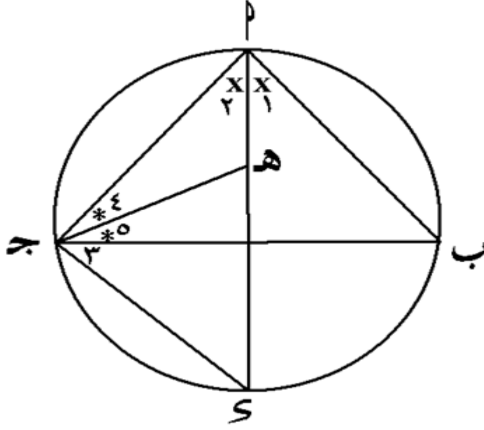
∵ ∠ هـ أ ب خارجة عن △ أ ج ب

∴ ق(∠ هـ أ ب) = ق(∠ ج) + ق(∠ ب) = ٣٦ + ٢٢ = ٥٨°

∴ ق(هـ ب⌒) = ٢ ق(هـ أ ب) = ٢ × ٥٨ = ١١٦°

(٣١) فى الشكل المقابل :

△ ٱ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، $\overleftarrow{ٱ ء}$ ينصف (∠ ٱ) ويقطع الدائرة فى ء ، $\overleftarrow{جـ هـ}$ ينصف ∠ جـ ويقطع $\overline{ٱ ء}$ فى هـ أثبت أن : △ ء جـ هـ متساوى الساقين .



∵ ق (∠ ١) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب⌢ء)

∵ ق (∠ ٣) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب⌢ء)

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٣)

∵ $\overleftarrow{ٱ ء}$ ينصف (∠ ب ٱ جـ) ∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)

∴ ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣) .... (١)

∴ $\overleftarrow{جـ هـ}$ ينصف (∠ ٱ جـ ب)

∴ ق (∠ ٤) = ق (∠ ٥) .... (٢) بجمع (١) ، (٢)

∴ ق (∠ ٢) + ق (∠ ٤) = ق (∠ ٣) + ق (∠ ٥)

∵ ق (ء هـ جـ) = ق (∠ ٢) + ق (∠ ٤)

∵ ق (∠ ء جـ هـ) = ق (∠ ٣) + ق (∠ ٥)

∴ ق (∠ ء هـ جـ) = ق (ق (∠ ء جـ هـ) ∴ ء هـ = ء جـ

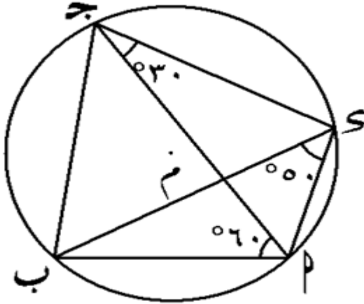
∴ △ ء جـ هـ متساوى الساقين

(٣٢) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ب ٢ جـ) = ٦٠° ، ق(∠ ٢ ء ب) = ٥٠° ، ق(∠ ٢ جـ ء) = ٣٠°

اوجد قياسات الزوايا ❶ ق(∠ ب ٢ جـ) ❷ ق(∠ ٢ ب ء) ❸ ق(∠ ب ء جـ)

❹ ق(∠ ء ٢ جـ) ❺ ق(∠ ء ب جـ)



ق(∠ ب ٢ جـ) = ق(∠ ٢ ء ب) = ٥٠°

(محيطيطان يحصران ٢ب⌒)

ق(∠ ٢ ب ء) = ق(∠ ٢ جـ ء) = ٣٠°

(محيطيتان مشتركتان ف ٢ء⌒)

ق(∠ ب ء جـ) = ق(∠ ب ٢ جـ) = ٦٠°

(محيطيتان مشتركتان فى ب جـ⌒)

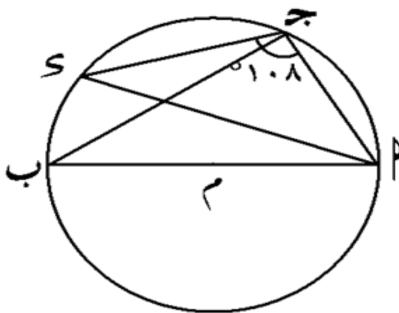
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة ٢ جـ ء = ١٨٠°

ق(∠ ء ٢ جـ) = ١٨٠ – (٣٠ + ٥٠ + ٦٠) = ٤٠°

ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء ٢ جـ) = ٤٠° (محيطيتان مشتركتان فى ء جـ⌒)

(٣٣) فى الشكل المقابل :

٢ب قطر فى الدائرة م ، ق(∠ ٢ جـ ء) = ١٠٨° أوجد : ق(∠ ب ٢ ء)



٢ب قطر فى الدائرة م

ق(∠ ٢ جـ ب) = ٩٠°

ق(∠ ب جـ ء) = ق(∠ ٢ جـ ء) – ق(∠ ٢ جـ ب)

= ١٠٨ – ٩٠ = ١٨°

ق(∠ ب ٢ ء) = ق(ب جـ ء) = ١٨° (محيطيتان تحصران ب ء⌒)

عكس نظرية (١ – ٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

نظرية (١ – ٣)

إذا كان الشكل الرباعى دائرياً فإن كل زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموعهم = ١٨٠°)

نظرية

قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً

يكون الشكل الرباعى دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

١ إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

٢ إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع

٣ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

٤ إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

نتائج هامة

١ المماس يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

٢ المستقيم العمودى على قطر الدائرة من أحدى نهايتيه يكون مماسا للدائرة

٣ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة متوازيان

٤ المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى الدائرة يتقاطعان فى نقطة واحدة

نظرية

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول

نتائج هامة

(١) المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها محور تماثل لوتر التماس الواصل بين نقطتى التماس

(٢) المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطر المرسومين من نقطتى التماس

الدائرة الداخلة للمثلث :– هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

الدائرة الخارجة للمثلث :– هى الدائرة التى تمر برؤوسه

مركز الدائرة الخارجة للمثلث

هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها (محاور أضلاعه)

نظرية (٢ – ٢)

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

ق (ب أ جـ) = ق (أ ء جـ)

قياس المماسية = $\frac{١}{٢}$ قياس المركزية المشتركة معها فى القوس

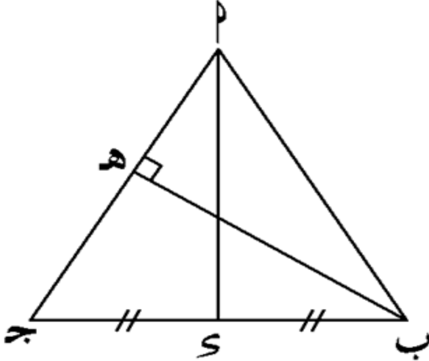
= $\frac{١}{٢}$ قياس القوس المحصور بين ضلعيها

قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة = ١٣٥°

قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى سدس دائرة = ١٥٠°

(١) فى الشكل المقابل :

ﻡ ب ﺟ مثلث متساوى الساقين فيه ﻡ ب = ﻡ ﺟ ، ء منتصف ب ﺟ ، رسم $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{ﻡ ﺟ}}$
حيث $\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{ﻡ ﺟ}}$ = { هـ } أثبت أن النقط ﻡ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة



فى $\triangle$ ﻡ ب ﺟ

ﻡ ب = ﻡ ﺟ ، ء منتصف $\overline{\text{ب ﺟ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ﻡ ء}} \perp \overline{\text{ب ﺟ}}$

$\therefore$ ق($\angle$ ﻡ ء ب) = ٩٠°

$\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{ﻡ ﺟ}}$

$\therefore$ ق($\angle$ ﻡ هـ ب) = ٩٠°

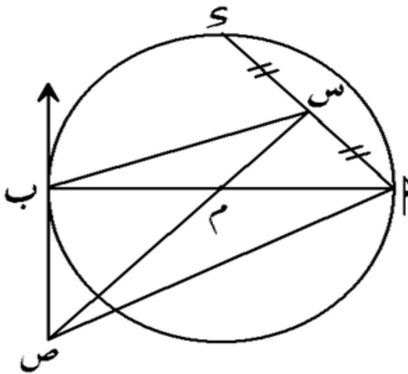
$\therefore$ ق ($\angle$ ﻡ هـ ب) = ق ($\angle$ ﻡ ء ب) [زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة]

$\therefore$ النقط ﻡ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة

(٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ﻡ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، س منتصف ﻡ ﺟ $\overline{\text{س م}}$ يقطع مماس للدائرة عند ب فى ص
أثبت أن الشكل ﻡ س ب ص رباعى دائرى

الحـــــل



س منتصف $\overline{\text{ﻡ ب}}$ $\therefore$ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ﻡ ﺟ}}$

$\therefore$ ق($\angle$ ﻡ س ص) = ٩٠°

$\overline{\text{ص ب}}$ مماس

$\therefore$ ق (ﻡ ب ص) = ٩٠°

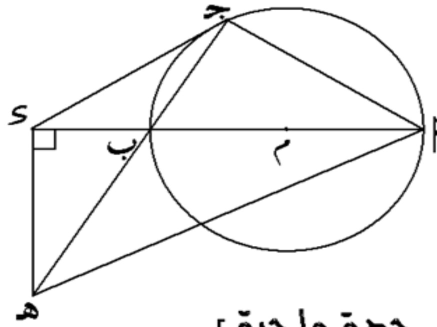
ق($\angle$ ﻡ س ص) = ق ($\angle$ ﻡ ب ﺟ)

زوايتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة

$\therefore$ الشكل ﻡ س ب ص رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل :

ؐ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ ؐ ب أثبت أن الشكل ؐ جـ ء هـ رباعى دائرى



الحـــــــــل ؐ ب قطر

∴ ق(ؐ جـ ب) = ٩٠° [محيطية فى نصف دائرة]

ء هـ ⊥ ؐ ب

∴ ق(ؐ ء هـ) = ٩٠°

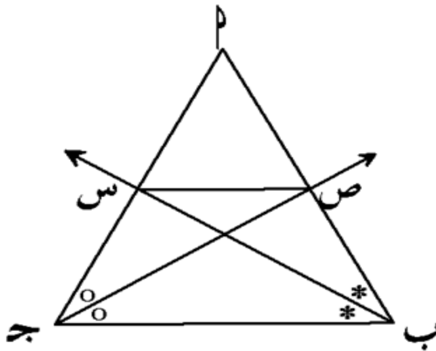
ق(ؐ جـ هـ) = ق(ؐ ء هـ) [مرسومتان على قاعدة واحدة ؐ هـ وفى جهة واحدة]

∴ الشكل ؐ جـ ء هـ رباعى دائرى

(٤) فى الشكل المقابل :

ؐ ب = ؐ جـ ، ب س ينصف ∠ ب ، جـ ص ينصف ∠ جـ

أثبت ان ❶ ب جـ س ص رباعى دائرى ❷ س ص // ب جـ



الحـــــــــل ؐ ب = ؐ جـ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) .... (١)

ب س ينصف ∠ ب

∴ ق(∠ ص ب س) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب) .... (٢)

جـ ص ينصف ∠ جـ

∴ ق(∠ ص جـ س) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ جـ) ....(٣) من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج ان

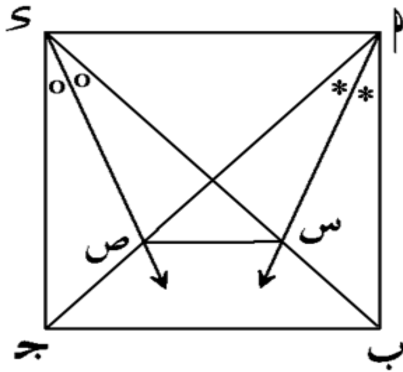
ق(∠ ص ب س) = ق(∠ ص جـ س) ∴ الشكل ب جـ س ص رباعى دائرى

∴ ق(∠ ؐ ص س) = ق(∠ جـ) .... (٤)

من ١ ، ٤ ينتج انق (∠ ؐ ص س) = ق(∠ ب) ∴ س ص // ب جـ

(٥) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مربع ، $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى س ، $\overleftarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ جـ ء ب ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ص أثبت أن ❶ الشكل أ س ص ء رباعى دائرى ❷ ق(∠ أ ص س) = ٤٥°



الحـــــل   أ ب جـ ء مربع

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ ب ء جـ) = ٤٥°

$\overleftarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق(∠ س أ ص) = $\frac{٤٥}{٢}$ = ٢٢,٥°

$\overleftarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ ب ء جـ

∴ ق(∠ س ء ص) = $\frac{٤٥}{٢}$ = ٢٢,٥°   ∴ ق(∠ س أ ص) = ق(∠ س ء ص)

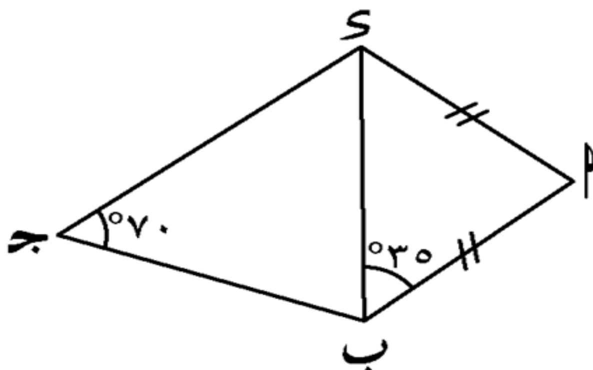
∴ أ س ص ء رباعى دائرى   ∴ ق(∠ أ ص س) = ٤٥°

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ أ ء ب) [مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها]

أ س ص ء رباعى دائرى

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، ق(∠ أ ب ء) = ٣٥° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° أثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــل

فى △ أ ب ء   أ ب = أ ء

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) = ٣٥°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – ٧٠° = ١١٠°

ق(∠ أ) + ق(∠ جـ) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان س ص ⟷ مماس للدائرة عند أ ، أ ب = أ جـ ، ق(∠ ص أ جـ) = ٧٠°
أوجد ق(∠ ب هـ جـ) حيث هـ ∈ ⌒ب جـ

الحـــــل

س ص ⟷ مماس

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ أ ب)

[مماسية ومحيطية] هـ ب أ جـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب) = ٧٠°

أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

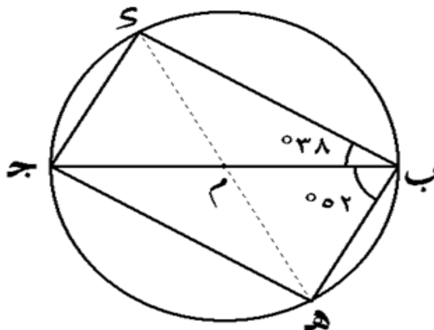
∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

∴ ق(∠ ب هـ جـ) = ١٨٠° – ٤٠° = ١٤٠°

(٨) فى الشكل المقابل :

ب جـ قطر فى دائرة م ، ب ء ، ب هـ وتران رسما فى جهتين مختلفتين من ب جـ فإذا كان
ق(∠ جـ ب هـ) = ٥٢° ، ق(∠ ء ب جـ) = ٣٨°

❶ أوجد ق(∠ جـ هـ ب) ، ق(∠ ء جـ ب) ❷ أثبت أن ء هـ قطر فى الدائرة م



الحـــــل ب جـ قطر ∴ ق(∠ جـ هـ ب) = ٩٠°

، ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠°

ق(∠ ء جـ ب) = ١٨٠° – [٣٨° + ٩٠°]

= ١٨٠° – ١٢٨° = ٥٢°

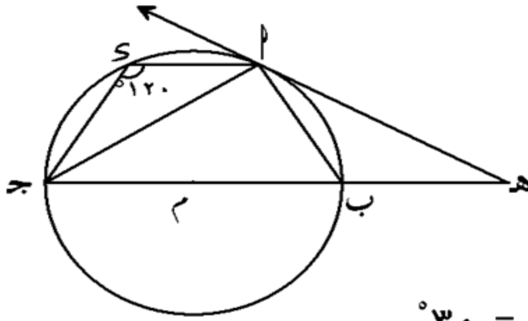
ق(∠ ء ب جـ) = ٣٨° + ٥٢° = ٩٠°

∴ ء هـ قطر فى الدائرة م

(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د رباعى دائرى داخل دائرة م ب جـ قطر فيها ، هـ أ مماس للدائرة عند أ

وإذا كان ق (∠ أ د جـ) = ١٢٠° أثبت أن ❶ ب أ = ب هـ ❷ ق (أ ب هـ) = ق (هـ أ جـ)



الحل ب جـ قطر ∴ ق (∠ ب أ جـ) = ٩٠°

أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ١٨٠° — ١٢٠° = ٦٠°

، ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ أ د جـ) = ١٢٠°

ق (∠ أ جـ ب) = ١٨٠° — [٩٠° + ٦٠°] = ١٨٠° — ١٥٠° = ٣٠°

ق (∠ هـ) = ١٨٠° — [١٢٠° + ٣٠°] = ١٨٠° — ١٥٠° = ٣٠°

ق (∠ هـ) = ق (∠ هـ أ ب) = ٣٠°

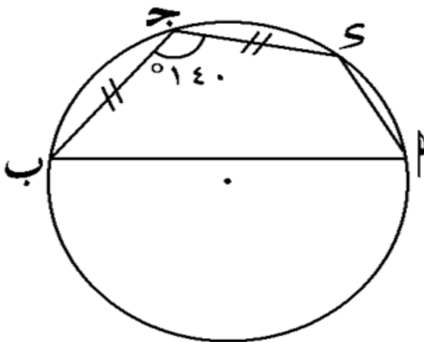
فى △ أ هـ ب ∴ ب هـ = ب أ ق (∠ أ ب هـ) = ١٢٠°

∴ ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ هـ أ جـ) ق (∠ هـ أ جـ) = ٣٠° + ٩٠° = ١٢٠°

(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د مرسوم داخل الدائرة م ، جـ ب = جـ د ، ق (∠ ب جـ د) = ١٤٠°

أوجد ❶ ق (∠ أ) ❷ ق (∠ د)



الحل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° — ١٤٠° = ٤٠°

∴ ق (⌒ ب جـ د) = ٨٠°

ق (∠ د) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × ٢٢٠° = ١١٠°

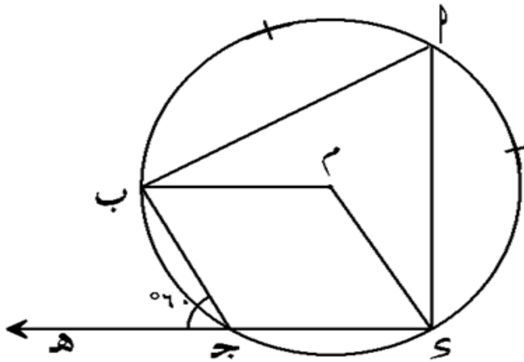
ب جـ = جـ د ∴ ق (⌒ ب جـ) = ق (⌒ جـ د) = ٤٠°

∴ ق (⌒ أ ب جـ) = ١٨٠° + ٤٠° = ٢٢٠°

[١٢] فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب جـ هـ) = ٦٠° ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ء}}$ ، أ منتصف $\frown{\text{ب ء}}$ أثبت أن

❶ الشكل ب م ء جـ معين ❷ $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فى الدائرة



أ ء جـ ب رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب جـ ء) = ٦٠° [خارجة]

ق (∠ ء م ب) = ٢ ق (∠ أ) [محيطية ومركزية]

∴ ق (∠ ء م ب) = ١٢٠°

ق (∠ ب جـ ء) = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠°

$\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ م ء جـ) = ١٨٠ – ١٢٠° = ٦٠°

ق (∠ م ء هـ) = ق (∠ ب جـ هـ) [متناظرتان]

∴ $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ء}}$

∴ م ء جـ ب متوازى أضلاع

م ء = م ب

∴ م ء جـ ب معين ق (∠ ء م ب) = ١٢٠°

∴ ق (∠ ء جـ ب) = ١٢٠°

∴ ق ($\frown{\text{أ ء}}$) = ق ($\frown{\text{أ ب}}$) = ١٢٠°

أ ء = أ ب

ء جـ = جـ ب [م ء جـ ب معين]

∴ ق ($\frown{\text{ء جـ}}$) = ق ($\frown{\text{جـ ب}}$) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ء جـ) = ١٢٠° + ٦٠° = ١٨٠

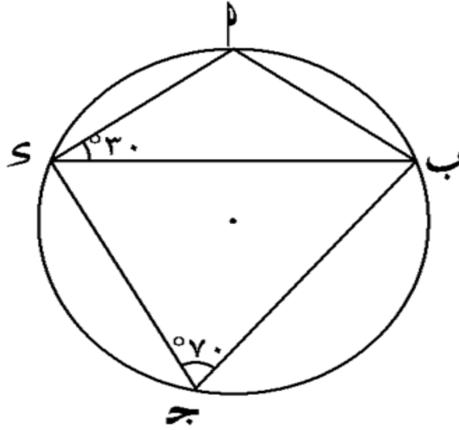
∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

∴ أ جـ قطر فى الدائرة م

(١٣) فى الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان ق(∠ أ ب د)

الحـــــل



أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – ٧٠° = ١١٠°

مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

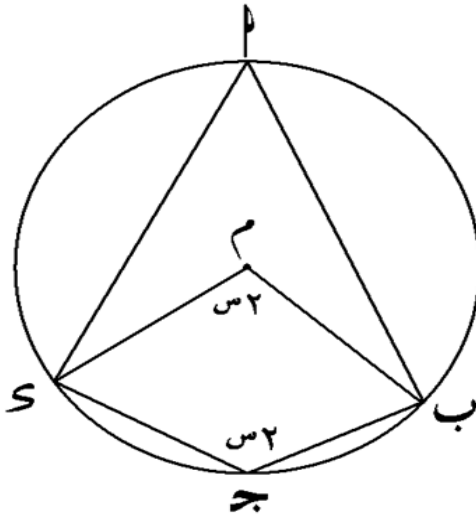
∴ ق(∠ أ ب د) = ١٨٠° – [١١٠ + ٣٠°]

= ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

(١٤) فى الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان ق(∠ أ)

الحـــــل



ق(∠ ب م د) المنعكسة = ٣٦٠° – ٢ س

ق(∠ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م د) المنعكسة

٢س = $\frac{١}{٢}$ [٣٦٠° – ٢ س]

٢س = ١٨٠° – س

٢س + س = ١٨٠°

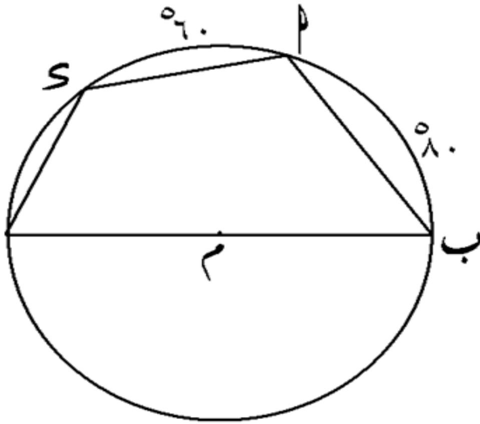
٣ س = ١٨٠°   س = ٦٠°

ق(∠ جـ) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

ق(∠ أ) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

(١٥) فى الشكل المقابل :

أوجد قياسات زوايا الشكل الرباعى أ ب جـ ء



ب جـ قطر   ق(ب جـ⌒) = ١٨٠°

∴ ق(ء جـ⌒) = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

ق(∠ ب) = ١/٢ ق(∠ أ ء جـ) = ١/٢ × ١٠٠° = ٥٠°

∴ ق(∠ ء) = ١٨٠° – ٥٠° = ١٣٠°

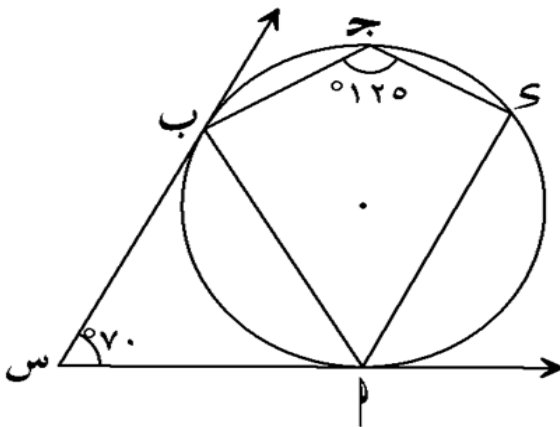
ق(∠ جـ) = ١/٢ ق(∠ ب أ ء) = ١/٢ × ١٤٠° = ٧٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – ٧٠°

(١٦) فى الشكل المقابل :

س أ ، س ب مماسان للدائرة عند أ ، ب ، ق(∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق(∠ ء جـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن ① أ ب ينصف ∠ ء أ س ② أ ء // س ب



أ ء جـ ب رباعى دائرى

ق(∠ جـ) + ق(∠ ء أ ب) = ١٨٠ [متقابلتان]

ق(∠ ء أ ب) = ١٨٠° – ١٢٥° = ٥٥°

س أ ، س ب مماستان   ∴ س أ = س ب

∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ س ب أ) = ١١٠/٢ = ٥٥°

ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ س أ ب)

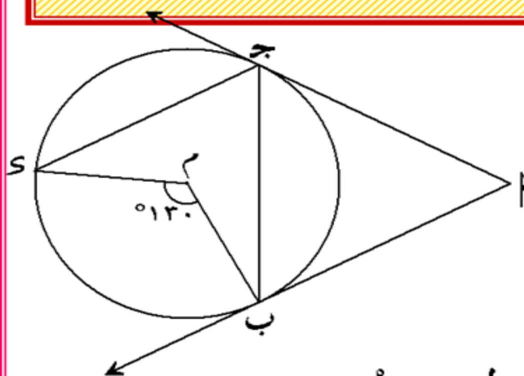
∴ أ ب ينصف ∠ ء أ س   ق(∠ س ب أ) = ق(∠ ء أ ب) = ٥٥ وهما متبادلتان

∴ أ ء // س ب

(١٧) في الشكل المقابل :

أب ، أج مماستان للدائرة م ، أب // جء ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

أثبت أن ❶ جب ينصف ∠ أ ج ء ❷ ق(∠ أ)



ق(∠ ب ج ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ء) [محيطية ومركزية]

∴ ق(∠ ب ج ء) = $\frac{١}{٢}$ × ١٣٠° = ٦٥°   أب // جء

∴ ق(∠ أ ب ج) = ق(ب ج ء) [متبادلتان]   ∴ ق(أ ب ج) = ٦٥°

أب ، أج مماستان   ∴ أب = أج

∴ ق(∠ أ ج ب) = ق(∠ أ ب ج)   ∴ ق(∠ أ ج ب) = ٦٥°

ق(∠ أ ج ب) = ق(∠ ب ج ء)   ∴ جب ينصف أ ج ء

في △ أ ب ج   ق(∠ أ) = ١٨٠° – [٦٥° + ٦٥°] = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

(١٨) في الشكل المقابل :

الدائرة تمس أضلاع المثلث أ ب ج من الداخل في ء ، هـ ، و أوجد : محيط △ أ ب ج

أء ، أهـ قطعتان مماستان ∴ أء = أهـ   ∴ أهـ = ٢ سم

بء ، ب و قطعتان مماستان ∴ بء = ب و   ∴ بء = ٤ سم

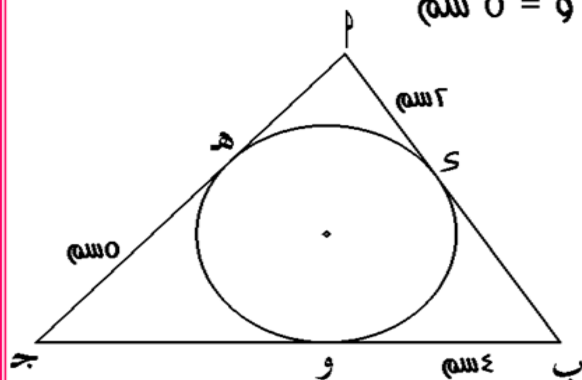
ج و ، جهـ قطعتان مماستان ∴ ج و = جهـ   ∴ ج و = ٥ سم

∴ أ ب = ٢ + ٤ = ٦سم

ب ج = ٤ + ٥ = ٩ سم

أ ج = ٢ + ٥ = ٧ سم

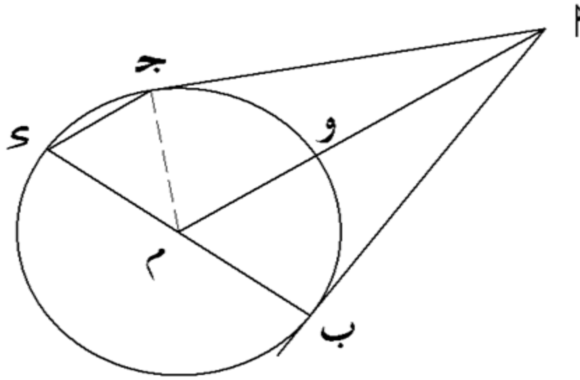
محيط △ أ ب ج = ٦ + ٩ + ٧ = ٢٢ سم



مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى
Mr : Walid Rushdy 01112467874 01062220750

(١٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، $\overline{ب ء}$ قطر فى الدائرة أثبت ان أ م // جـ ء



الحـــــل العمل نصل $\overline{م جـ}$

$\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ب}$ قطعتان مماستان

∴ ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ أ م ب)

∴ ق($\frown{و جـ}$) = ق($\frown{و ب}$) = $\frac{1}{2}$ ق($\frown{جـ و ب}$)

∴ ق(∠ أ م ب) = $\frac{1}{2}$ ق($\frown{جـ و ب}$) .... (١)

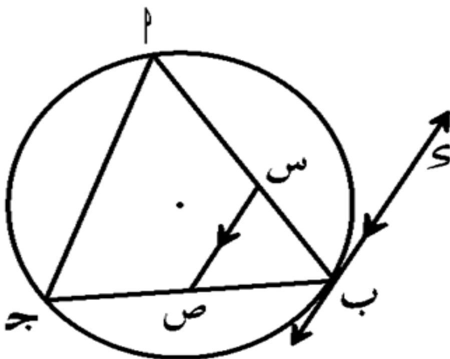
، ق(∠ جـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق($\frown{جـ و ب}$) .... (٢) من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(∠ أ م ب) = ق(∠ جـ ء ب) وهما متناظرتان　　∴ جـ ء // أ ب

(٢١) فى الشكل المقابل :

فى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماسا للدائرة عند ب ، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب ء}$

أثبت أن الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى



الحـــــل $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماس عند ب

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ جـ) .... (١)

$\overline{ب ء}$ // $\overline{س ص}$

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ ب س ص) .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

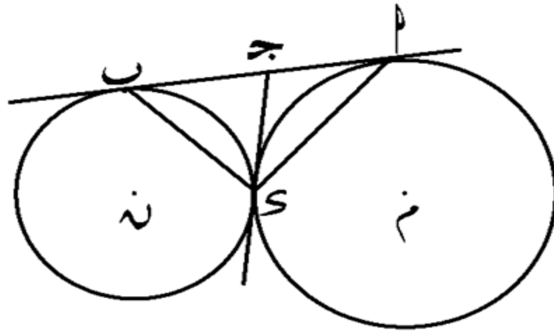
ق(∠ ب س ص) = ق(∠ جـ) [وهى خارجة عن الرباعى س ص جـ أ]

∴ س ص جـ أ رباعى دائرى

[٢٠] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ء ، ؟ ب مماس مشترك لهما عند ؟ ، ب ، ء جـ مماس مشترك لهما عند ء (١) أثبت أن جـ منتصف ؟ ب (٢) ق(∠ ؟ ء ب) = ٩٠°

الحـــــــل



جـ ؟ ، جـ ء قطعتان مماستان للدائرة م

∴ جـ ؟ = جـ ء .... (١)

جـ ء ، جـ ب قطعتان مماستان للدائرة ن

جـ ء = جـ ب .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن جـ ؟ = جـ ب

∴ جـ منتصف ؟ ب جـ ؟ = جـ ء

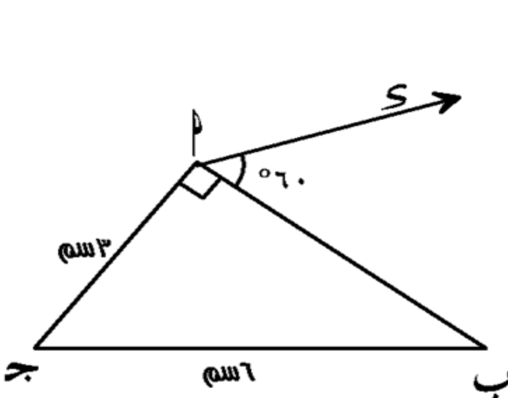
∴ ق(∠ جـ ء ؟) = ق(∠جـ؟ء) .... (٣)

∴ جـ ء = جـ ب .... (٤) ∴ ق(∠ جـ ء ب) = ق(∠ جـ ب ء) من ٣ ، ٤ ينتج

ق(∠ ؟ء ب) = ق(∠ جـ ؟ ء) + ق(∠ جـ ب ء) ∴ ق(∠ ؟ ء ب) = ٩٠°

[٢٦] فى الشكل المقابل :

أثبت أن ؟ ء مماسا للدائرة المارة برؤوس △ ؟ ب جـ



؟ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ∠ ؟ ؟ جـ = ١/٢ ب جـ

∴ ق(∠ ب) = ٣٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − [٩٠ + ٣٠] = ٦٠°

ق(∠ ء ؟ ب) = ق(∠ جـ)

∴ ؟ ء يمس الدائرة المارة برؤوس △ ؟ ب جـ

(٢٩) فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة س ، ص

م جـ ، م ب قطعتان مماستان . ∴ م جـ = م ب

∴ قٓ(∠ م جـ ب) = قٓ(∠ م ب جـ) = ٦٥°

م جـ مماس

∴ قٓ(∠ هـ) = قٓ(∠ م جـ ب)

∴ س = ٦٥°

∵ م جـ // ب هـ

∴ قٓ(∠ هـ ب و) = قٓ(∠ م) بالتناظر

∴ قٓ(∠ هـ ب و) = ٥٠°

∴ قٓ(⌒هـ ب) = ١٠٠° ص = ١٠٠°

(٣١) فى الشكل المقابل :

أوجد قيمتى س ، ص

الحـــــل

م ب ⟵ مماس ∴ قٓ(∠ ب جـ ء) = ٦٠°

م جـ ⟵ مماس ∴ قٓ(∠ جـ ب ء) = ٧٠°

∴ قٓ(∠ ء) = ١٨٠° – [٦٠° + ٧٠°] = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

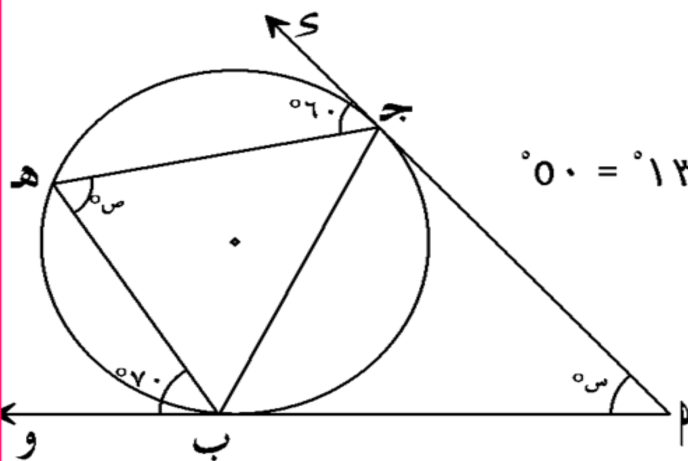
م جـ ⟵ مماس

∴ قٓ(∠ م جـ ب) = قٓ(∠ ء) = ٥٠°

م ب ⟵ ، م جـ ⟵ مماستان

∴ قٓ(∠ م ب جـ) = قٓ(∠ م جـ ب) = ٥٠°

قٓ(∠ م) = ١٨٠° – ١٠٠° = ٨٠°

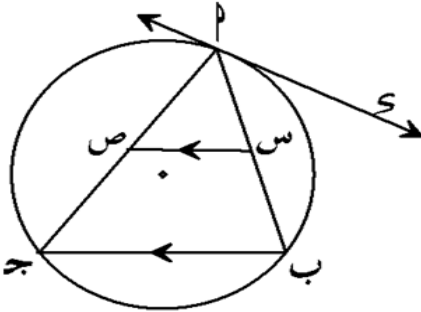


(٣٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان ﻫ ء مماسا للدائرة عند ﻫ ، س ص // ب جـ

أثبت أن ﻫ ء مماساً للدائرة المارة بالنقط ﻫ ، س ، ص

ﻫ ء مماس ∴ ق (∠ ء ﻫ ب) المماسية = ق (∠ جـ) المحيطية يحصران ﻫ ب .... (١)



س ص // ب جـ

∴ ق (∠ ﻫ ص س) = ق (∠ جـ) بالتناظر .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ ء ﻫ ب) = ق (∠ ﻫ ص س)

∴ ﻫ ء يمس الدائرة المارة برؤوس △ ﻫ س ص

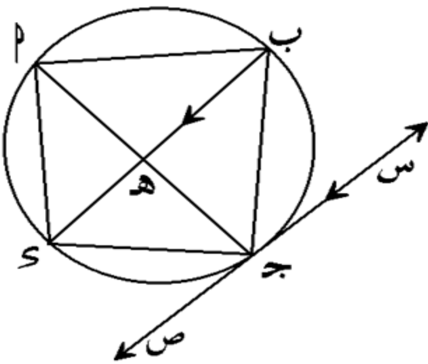
(٣٣) فى الشكل المقابل :

ﻫ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه فى هـ رسم س ص مماسا للدائرة عند جـ

حيث س ص // ب ء أثبت ان

(١) ﻫ جـ ينصف ∠ ب ﻫ ء (٢) ب جـ يمس الدائرة المارة برؤوس △ ﻫ ب هـ

الحـــل س ص // ب ء ∴ ق (ب جـ) = ق (جـ ء) .... (١)



ق (∠ ب ﻫ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب جـ)

∴ ق (∠ جـ ﻫ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (جـ ء)

ق (∠ ب ﻫ جـ) = ق (∠ جـ ﻫ ء)

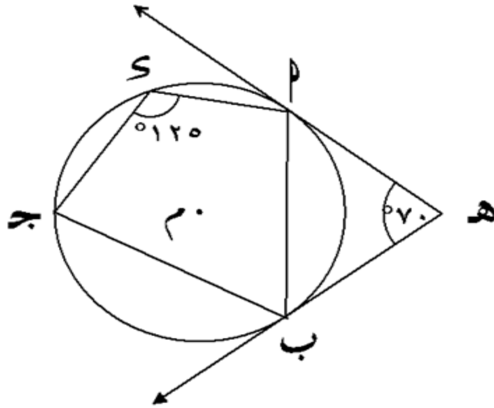
∴ ﻫ جـ ينصف ∠ ب ﻫ ء ∴ ق (∠ ب ﻫ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب جـ)

ق (∠ جـ ب ء) = $\frac{1}{2}$ ق (جـ ء) ∴ ق (ب جـ) = ق (جـ ء)

ق (∠ ب ﻫ جـ) = ق (∠ جـ ب ء) ∴ ب جـ يمس الدائرة المارة بـ △ ﻫ ب هـ

(٣٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها ، $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ ب}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب
فإذا كان ق (∠ أ هـ ب) = ٧٠° ، ق (∠ أ ء جـ) = ١٢٥° أثبت أن
(١) أ ب = أ جـ   (٢) $\overline{أ جـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ



الحـــــــل   أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ ب جـ) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥°

$\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ ب}$ قطعتان مماستان

∴ ق (∠ هـ أ ب) = ق (∠ هـ ب أ) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

$\overleftarrow{هـ أ}$ مماس   ∴ ق (أ ب هـ) المماسية = ق (∠ أ جـ ب) المحيطية

يحصران $\overset{\frown}{أ ب}$

∴ ق (أ جـ ب) = ٥٥°   ∴ ق (أ جـ ب) = ق (أ ب جـ)

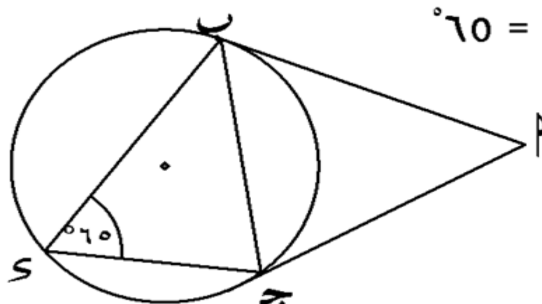
∴ أ ب = أ جـ وهو المطلوب أولاً

∵ ق (ب أ جـ) = ١٨٠ − [٥٥° + ٥٥°] = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

ق (ب أ جـ) = ق (أ هـ ب)   ∴ أ جـ مماس للدائرة المارة بالمثلث Δ أ هـ ب

(٣٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ق (∠ ب ء جـ) = ٦٥°   أوجد بالبرهان ق(∠ أ)



الحـــــــل $\overline{أ جـ}$ مماس   ∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٦٥°

$\overline{أ ب}$ مماس

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٦٥°

ق(∠ أ) = ١٨٠° − [٦٥° + ٦٥°] = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

(٣٦) فى الشكل المقابل :

$\overline{ءب}$ ، $\overline{ءأ}$ قطعتان مماستان للدائرة أ ب = أ جـ

أثبت أن أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

الحـــــــل $\overline{ءب}$ ، $\overline{ءأ}$ قطعتان مماستان

∴ ء ب = ء جـ

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ ء أ ب) .... (١)

أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ جـ) .... (٢)

$\overline{ءب}$ مماس للدائرة

∴ ق(∠ ء ب أ) المماسية = ق(∠ جـ)المحيطية يحصران $\overset{\frown}{أ ب}$ .... (٣)

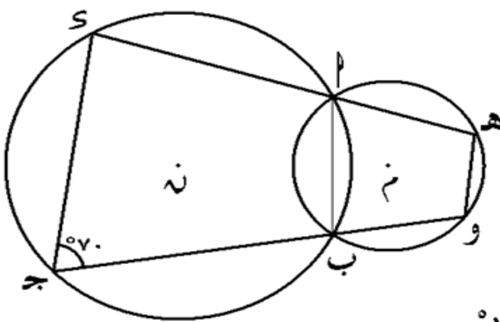
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ جـ)

∴ $\overline{أ جـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

(٣٧) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب رسم أ ء يقطع الدائرة م فى هـ والدائرة ن فى ء ، ق(∠ جـ) = ٧٠°

(١) أوجد ق(∠ و) (٢) أثبت أن $\overline{جـ ء}$ // $\overline{هـ و}$



الحـــــــل أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب أ ء) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

ق(∠ ب أ ء) = ١٨٠° – ٧٠° = ١١٠°

∵ أ هـ و ب رباعى دائرى

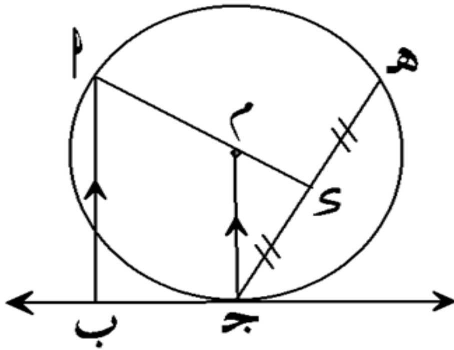
∴ ق(∠ ب أ ء)الخارجة = ق(∠ و) ∴ ق(∠ و) = ١١٠°

ق(∠ و) + ق(∠ جـ) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠

متكاملتان وفى جهة واحدة من القاطع ∴ $\overline{جـ ء}$ // $\overline{هـ و}$

(٣٨) فى الشكل المقابل :

ء منتصف هـ جـ ، $\overline{جـ م} \parallel \overline{أ ب}$ ، ب جـ مماس أثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحــــل ء منتصف هـ جـ

∴ $\overline{م ء} \perp \overline{جـ هـ}$

∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠° ....(١)

$\overleftrightarrow{جـ ب}$ مماس $\overline{م جـ} \perp \overline{ب جـ}$

∴ ق(∠ م جـ ب) = ٩٠°

$\overline{جـ م} \parallel \overline{أ ب}$

∴ ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ م جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠° ....(٢) من ١ ، ٢ ينتج أن

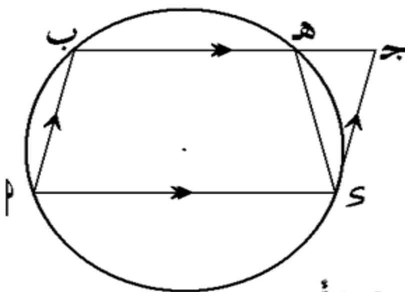
ق(∠ م ء جـ) + ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠

∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٣٩) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء تقطع ب جـ فى هـ أثبت أن جـ ء = هـ ء

الحــــل



أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ) خواص متوازى الأضلاع ....(١)

أ ب هـ ء رباعى دائرى

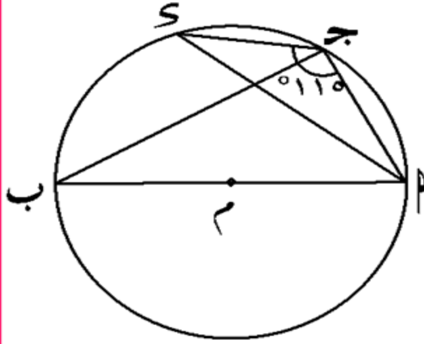
∴ ق(∠ جـ هـ ء) الخارجة = ق(∠ أ) ....(٢) من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(∠ جـ هـ ء) الخارجة = ق(∠ جـ)

∴ ء هـ = ء جـ

(٤٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ق (∠ ا جـ ء) = ١١٥° أوجد بالبرهان ق (∠ ب ا ء)



الحـــــــل

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر ∴ ق (∠ ا جـ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ ء جـ ب) = ١١٥° – ٩٠° = ٢٥°

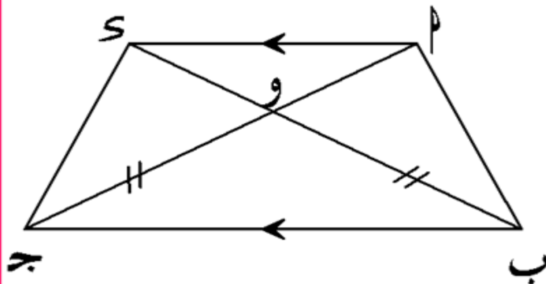
ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ ء جـ ب) [محيطيتان مشتركتان فى القوس]

∴ ق(∠ ب ا ء) = ٢٥°

(٤١) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = { و } حيث و ب = و جـ

فأثبت أن : الشكل ا ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــل

و ب = و جـ

∴ ق (∠ و ب جـ) = ق (∠ و جـ ب) .... (١)

$\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق (∠ ء ا جـ) = ق (∠ و جـ ب .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (∠ ء ا جـ) = ق (∠ ء ب جـ) [زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة]

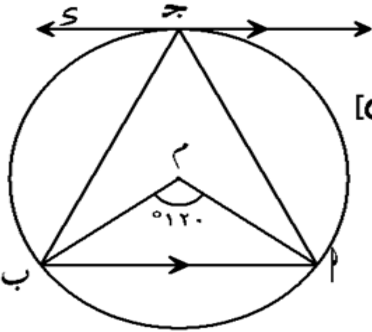
∴ ا ب جـ ء رباعى دائرى

[٤٢] فى الشكل المقابل :

جـ ء مماس للدائرة عند جـ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

أثبت أن : △ جـ أ ب متساوى الأضلاع

الحـــــل



ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ م ب) [محيطية ومركزية مشتركتان فى القوس]

∴ ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠° .... (١)

ق(أ⌒ب) الأصغر = ق(∠ أ م ب) = ١٢٠

$\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

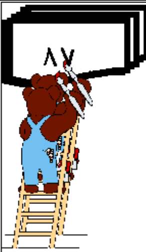
∴ ق(أ⌒جـ) = ق(جـ⌒ب) = $\frac{٣٦٠ - ١٢٠}{٢}$ = $\frac{٢٤٠}{٢}$ = ١٢٠°

ق(∠ جـ أ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(جـ⌒ب) = ٦٠° ....(٢)

ق(∠ جـ ب أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ⌒جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠° ....(٣) من ١ ، ٢ ،

٣

△ أ ب جـ متساوى الأضلاع



الهندسة

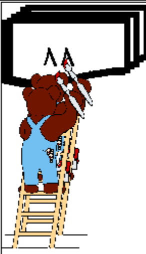
الوحدة الرابعة

١ نتائج على الدائرة

٢ موضع (نقطة – مستقيم – دائرة) بالنسبة لدائرة

٣ تعيين الدائرة

٤ نظرية الأوتار المتساوية فى الدائرة



هندسة الدائرة

الدائرة

هى مجموعة لا نهائية من نقط المستوى التى تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة .

النقطة الثابتة تسمى مركز الدائرة. والبعد الثابت يسمى طول نصف القطر.

م.

سطح الدائرة

(١) مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة

(٢) مجموعة النقاط داخل الدائرة اتحاد مجموعة نقاط الدائرة تسمى منطقة دائرية.

(٣) مركز الدائرة م ∈ لمجموعة النقط داخل الدائرة

(٤) مركز الدائرة م ∉ لمجموعة نقط الدائرة

(٥) مركز الدائرة م ∈ لمجموعة نقط سطح الدائرة

(٦) مساحة سطح الدائرة = π نق^٢

(٧) محيط الدائرة = ٢ π نق

نصف قطر الدائرة:

م نق

(١) قطعة مستقيمة طرفيها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة.

(٢) أنصاف أقطار الدائرة الواحدة (الدوائر المتطابقة) متساوية فى الطول

وتر الدائرة:

وتر

(١) قطعة مستقيمة طرفاها أى نقطتين مختلفتين من نقاط الدائره.

(٢) اوتار الدائرة ليس بالضرورة ان تكون متساوية

(٣) طول أى وتر فى الدائرة غير ما بمركزها أصغر من طول قطر الدائرة

قطر الدائرة :

قطر
م

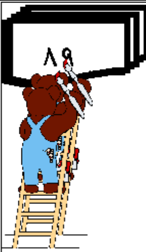
(١) هو وتر فى الدائرة يمر بمركزها.

(٢) القطر أكبر وتر فى الدائرة

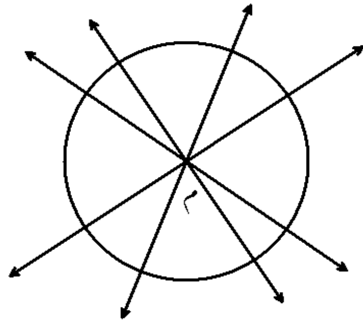
(٣) كل قطر يسمى وتر ولكن ليس كل وتر يسمى قطر

تطابق دائرتتن :

يقال لدائرتان أنهما متطابقتان إذا تساوى طولا نصف قطريهما.



محور تماثل الدائرة



(١) كل مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها.

(٢) عدد محاور تماثل الدائرة = عدد لا نهائى من الدوائر

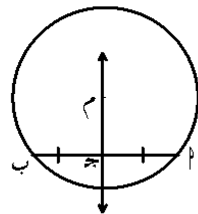
يلاحظ أن:

الدائره تجزئ مجموعة نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات هى :-

أ) مجموعة نقاط الدائرة　　ب) مجموعة نقاط داخل الدائرة　　جـ) مجموعة نقاط خارج الدائرة

نتائج هامة على الدائرة

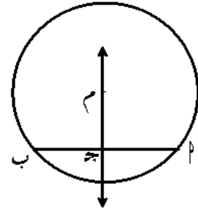
المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر



∵ جـ منتصف $\overline{ؤب}$

∴ $\overleftrightarrow{مجـ} \perp \overline{ؤب}$

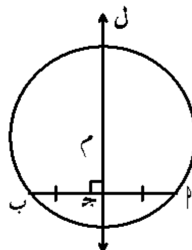
المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أى وتر فيها يكون ينصف هذا الوتر



∵ $\overleftrightarrow{مجـ} \perp \overline{ؤب}$

∴ جـ منتصف $\overline{ؤب}$

المستقيم المار عموديا على أى وتر من منتصفه يمر بمركز الدائرة (محور تماثل لهذه للدائرة)



∵ جـ منتصف $\overline{ؤب}$

∵ المستقيم ل $\perp \overline{ؤب}$

∴ م ∈ المستقيم ل

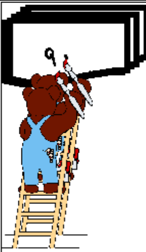
ملاحظات لحل التمارين

(١) فى المثلث القائم الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوى نصف طول الوتر

(٢) فى المثلث القائم مربع الوتر = مجموع مربعي ضلعي القائمة

(٣) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها = نصف طول هذا الضلع

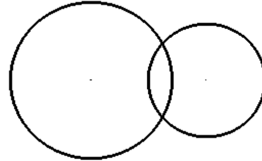
(٤) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتين (متساويتان فى القياس)



تمارين نتائج المفاهيم الأساسية على الدائرة

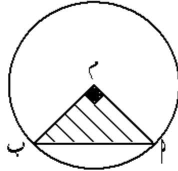
[١] أكمل ما يأتى

(١) الوتر الذى يمر بمركز الدائرة يسمى ....



(٢) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....

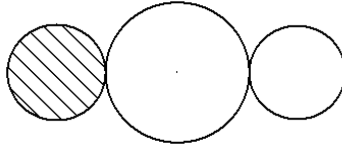
(٣) إذا كان أكبر أوتار الدائرة طولا = ١٤سم فان محيط هذه الدائرة = ...



(٤) فى الشكل المقابل إذا كانت م دائرة ، محيط الدائرة م = ١٢ π سم

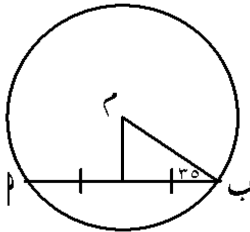
فان مساحة △ أ م ب = ... سم^2

(٥) عدد محاور تماثل الدائرة ....   بينما عدد محاور تماثل نصف دائرة ....



(٦) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....

(٧) المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر ....



(٨) فى الشكل المقابل

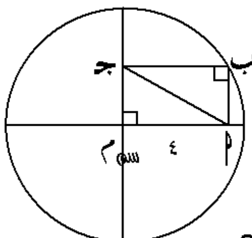
ء منتصف أ ب ، ق(∠ب) = ٣٥° فان ق(∠أ م ء) = ...

(٩) ناتج ضرب النسبة التقريبية π فى طول قطر الدائرة = ...

(١٠) أكبر أوتار الدائرة طولا يسمى ....

(١١) إذا كانت ء هـ قطر فى دائرة م ، ء(− ٤ ، ٠) ، م(٠ ، ٢)

فان هـ = (.... ، ....) وطول نصف قطر الدائرة = ... وحدة طول

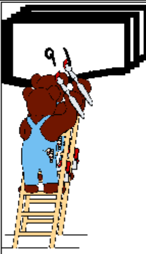


(١٢) فى الشكل المقابل أ ب جـ م مستطيل ، أ م = ٤سم ، نصف قطر الدائرة م = ٥سم

فان أ جـ = ... سم ، أ ب = ... سم

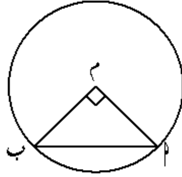
(١٣) أ ب قطر فى الدائرة م حيث أ(٣ ، −٥) ، ب(−٧ ، −١) فيكون احداثى نقطة مركز الدائرة م ....

(١٤) إذا كانت م دائرة ، أ ب وتر فيها ، م ء ⊥ أ ب فان ب ء ...... أ ء



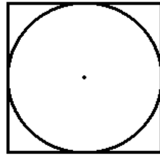
(١٥) فى الشكل المقابل : اذا كانت م دائرة ، مساحة △ أ م ب = ٥٠ سم٢

فان مساحة سطح الدائرة م = ...



(١٦) فى الشكل المقابل : دائرة مرسومة داخل مربع مساحتها ١٦ π سم٢

فان طول ضلع المربع = ... سم

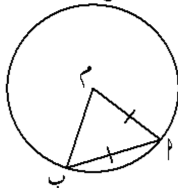


(١٧) إذا كانت ء هـ قطر فى دائرة م ، ء (- ١ ، ٨) ، م (٣ ، ٢) فان هـ = (.... ، ....)

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإختيارات الآتية

(١) مساحة سطح الدائرة = ... وحدة مربعة [٤π نق ، ٢π نق ، π نق ، π نق٢]

(٢) فى الشكل المقابل △ أ م ب ....



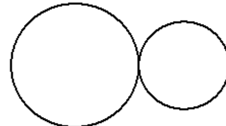
[متساوى الأضلاع ، مختلف الأضلاع ، قائم الزاوية ، منفرج الزاوية]

(٣) عدد محاور تماثل الدائرة .... [٤ ، ٢ ، ١ ، عدد لانهائى]

(٤) أكبر الأوتار طولا فى الدائرة .... [المماس ، المحيط ، القطر ، نصف القطر]

(٥) محيط الدائرة = ... وحدة طول [٤π نق ، ٢π نق ، π نق ، π نق٢]

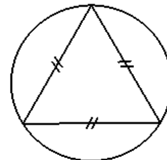
(٦) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....



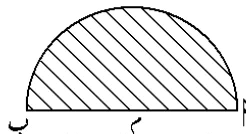
[٤ ، ٢ ، ١ ، عدد لانهائى]

(٧) دائرة طول نصف قطرها $\frac{5}{\pi}$ سم فان محيطها = ... سم [٨ ، ١٠ ، ١٢ ، $\frac{10}{\pi}$]

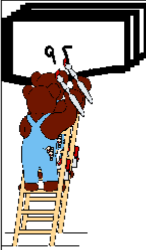
(٨) عدد محاور تماثل الشكل المقابل .... [٤ ، ٣ ، ١ ، عدد لانهائى]



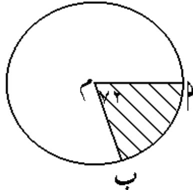
(٩) فى الشكل المقابل : محيط الشكل = ... وحدة طول



[٢ π نق + ٢نق ، π نق + نق ، π نق ، π نق + ٢نق]



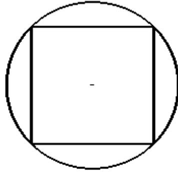
(١٠) فى الشكل المقابل : مساحة الجزء المظلل = ... سم٢



[$\frac{1}{3}\pi$ نق٢ ، $\frac{1}{4}\pi$ نق٢ ، $\frac{1}{5}\pi$ نق٢ ، $\frac{1}{6}\pi$ نق٢]

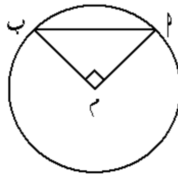
(١١) أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو .... [قطر فيها ، محور تماثل لها ، وتر فيها ، مماس لها]

(١٢) فى الشكل المقابل : مربع مرسوم داخل دائرة مساحته ١٨سم٢



فان طول قطر الدائرة = ... سم [٦ ، ١٢ ، ٢٤ π ، ٩ π]

(١٣) إذا كانت م دائرة ، مساحة سطح الدائرة م = ١٥٤ سم٢



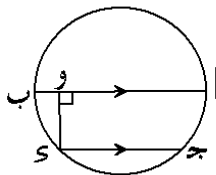
فان مساحة △ أ م ب = ... سم٢

[١٤ ، ٤٩ ، ٧ π ، ٢٤,٥]

(١٤) فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب = ٢٦سم ، جـ ء = ٢٤سم

، $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$ ، $\overline{ءو}$ ⊥ $\overline{أب}$ فان ء و = ... سم

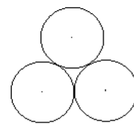


[٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٢]

(١٥) وتر طوله ١٢سم مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠سم فان بعد هذا الوتر عن مركزها .... سم

[٧ ، ٢٦ ، ٨ ، ٢]

(١٦) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....

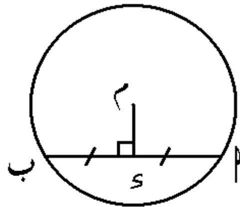


[٣ ، ٢ ، ١ ، عدد لانهائى]

[٣] فى الشكل المقابل

الدائرة م طول نصف قطرها ٥سم ، $\overline{أب}$ وتر فيها

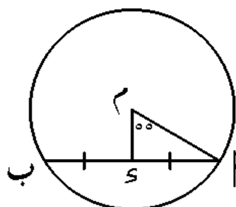
، ء منتصف $\overline{أب}$ فاذا كان م ء = ١٤سم . **اوجد مساحة سطح الدائرة** م

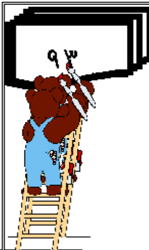


[٤] فى الشكل المقابل

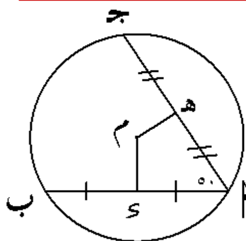
الدائرة م فيها ء منتصف $\overline{أب}$ ، ق(∠ م) = ٥٥°

أوجد ق(∠ م أ ء)





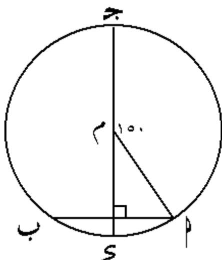
[٥]في الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٥٠°

، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ   **احسب** ق(∠ ء م هـ)

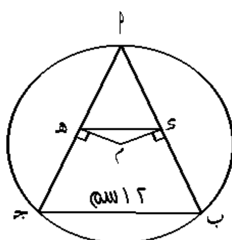
[٦]في الشكل المقابل



أ ب وتر فى دائرة مركزها م ، جـ ء قطر فيها ، جـ ء ⊥ أ ب

فاذا كان أ ب = ٨سم ، ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠° **أوجد** طول جـ ء

[٧]في الشكل المقابل

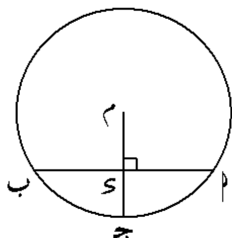


أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م ، م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ .

اثبت أن ء هـ // ب جـ

وإذا كان ب جـ = ١٢سم **أوجد** طول ء هـ

[٨] في الشكل المقابل

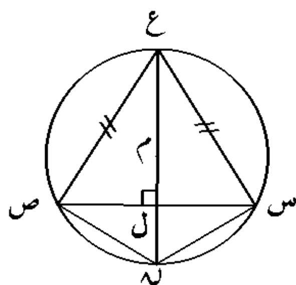


أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، م ء ⊥ أ ب ،

هـ منتصف أ جـ فاذا كان ق(∠جـ) = ٦٠° ، ب جـ = ٥سم

أوجد: ❶ ق(∠ ء م هـ) ❷ **محيط** △ أ ب جـ ❸ **طول نصف قطر الدائرة** م

[٩]في الشكل المقابل

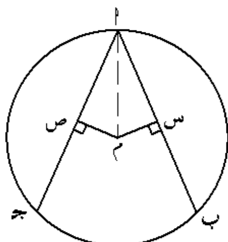


س ع = ص ع ، ع ل ⊥ س ص ، حيث ع ل ∩ الدائرة م = { ن }

اثبت أن : م ∈ ع ل   وإذا كان س ص = ١٦سم ، نق = ١٠سم .

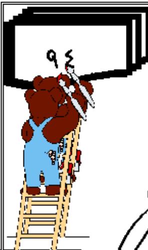
أوجد طول م ل ، ع ص ، **اثبت أن** س ن = ن ص

[١٠]في الشكل المقابل

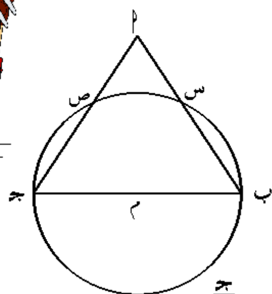


أ ب = أ جـ = ٢٤سم ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

فإذا كان م س = ٥سم . **أوجد نصف قطر الدائرة** م



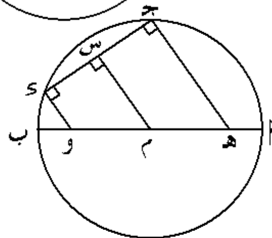
[١١] في الشكل المقابل



$\overline{بجـ}$ قطر فى الدائرة م ، ا ب = ا جـ

اثبت أن : ا س = ا ص

[١٢] في الشكل المقابل

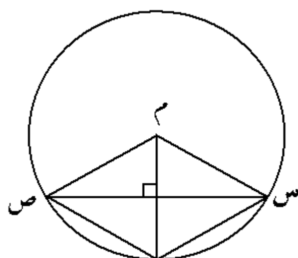


$\overline{اب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{جـ ء}$ وترفيها ، هـ ∈ $\overline{م ا}$ ، و ∈ $\overline{م ب}$ ،

$\overline{م س}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ جـ}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{و ء}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$.

برهن أن ا هـ = ب و

[١٣] في الشكل المقابل



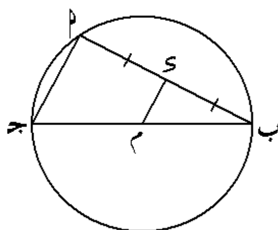
الدائرة م طول قطرها ٢٦سم ، س ص وترا فيها طوله ٢٤سم .

أوجد مساحة سطح △ س ص م .

وإذا سم $\overleftarrow{م ع}$ ⊥ $\overline{س ص}$ يقطع الدائرة م في ع .

أوجد مساحة سطح △ س ص ع **ومن ذلك استنتج : مساحة سطح الشكل الرباعى** س م ص ع

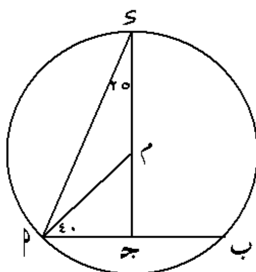
[١٤] في الشكل المقابل



$\overline{اب}$ وتر فى دائرة م ، $\overline{ب جـ}$ قطر فيها ، ء منتصف $\overline{ا ب}$

اثبت أن $\overline{م ء}$ // $\overline{ا جـ}$. **ثم احسب :** ق(∠ ا)

[١٥] في الشكل المقابل

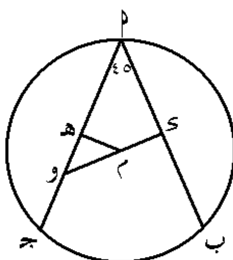


$\overline{اب}$ وتر فى الدائرة م ، ق(∠ ء) = ٢٥ °

، ق(∠ م ا جـ) = ٤٠ °

برهن أن : جـ منتصف $\overline{ا ب}$

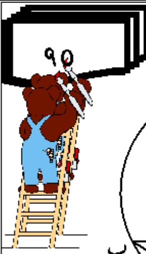
[١٦] في الشكل المقابل



$\overline{اب}$ ، $\overline{ا جـ}$ وتران فى الدائرة م ، ق(∠ ب ا جـ) = ٤٥

ء ، هـ منتصفا $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ على الترتيب

اثبت أن : △ هـ و م متساوى الساقين



[١٧] في الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم ، $\overline{أ ب}$ وتر فيها طوله ٢٤سم ،

جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{م جـ}$ ∩ الدائرة م = { ء } **أوجد** : مساحة △ أ ء ب

[١٨] في الشكل المقابل

م دائرة ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، س منتصف $\overline{أ ب}$

، رسم $\overrightarrow{س م}$ فقطع $\overline{جـ ء}$ في ص

اثبت أن : ص منتصف $\overline{جـ ء}$

[١٩] في الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران في الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب رسم $\overrightarrow{ء م}$ ، $\overrightarrow{هـ م}$ فقطعا الدائرة في س ، ص على الترتيب

اثبت أن △ س ص م متساوى الأضلاع

[٢٠] في الشكل المقابل

$\overline{س ص}$ ، $\overline{س ع}$ وتران متساويان في الطول في دائرة م بحيث ق (ص س ع) = ١٢٠°

فاذا كان : ء ، هـ منتصفا $\overline{س ص}$ ، $\overline{س ع}$ على الترتيب

أوجد : ق (∠ ء م هـ) **اثبت أن** : △ م ء هـ متساوى الساقين

[٢١] في الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{أ ب}$ وتر في الدائرة الكبرى

ويقطع الدائرة الصغرى في جـ ، ء ، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

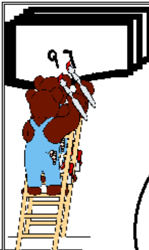
اثبت أن : أ جـ = ب ء

[٢٢] △ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م

، $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

اثبت أن : $\overline{هـ ء}$ // $\overline{أ ب}$.

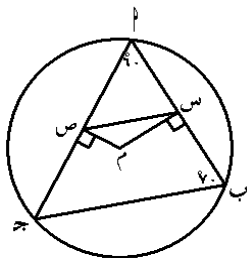
محيط △ جـ ء هـ = $\frac{1}{2}$ محيط △ أ ب جـ



[٢٣] في الشكل المقابل

م دائرة ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ ، ق(∠أ) = ٦٠°

، ق(∠ب) = ٧٠° **أوجد قياسات زوايا** △ م س ص

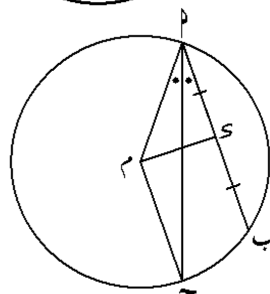


[٢٤] في الشكل المقابل

أ ب وترفى الدائرة م ، أ جـ ينصف (∠ ب أ م) ويقطع الدائرة م فى جـ

، اذا كانت ء منتصف أ ب

اثبت أن : ء م ⊥ جـ م

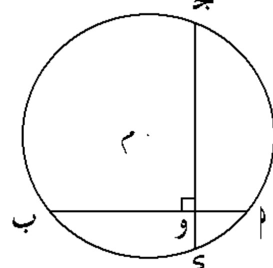


[٢٥] في الشكل المقابل

دائرة م طول نصف قطرها ٧سم ، أ ب ، جـ ء وتران

متعامدان ومتقاطعان فى النقطة و

فإذا كان : أ ب = ١٢سم ، جـ ء = ١٠سم . **أوجد طول** م و



[٢٦] أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى دائرة م ، أ ب = ١٢سم ، جـ ء = ١٦سم

أوجد البعد بين هذين الوترين اذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠سم **فهل توجد إجابات أخرى ؟ فسر إجابتك**

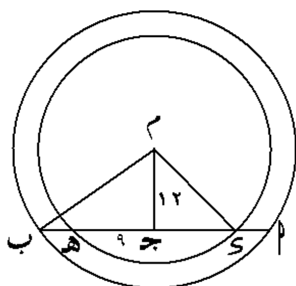
[٢٧] في الشكل المقابل

أ ب وترفى الدائرة الكبرى ويقطع الدائة الصغرى فى ء ، هـ

فاذا كان جـ منتصف أ ب ، م جـ = ١٢سم ، جـ هـ = ٩سم ،

طول نصف قطر الدائرة الصغرى = $\frac{٣}{٤}$ طول نصف قطر الدائرة الكبرى .

فأوجد : طول هـ ب



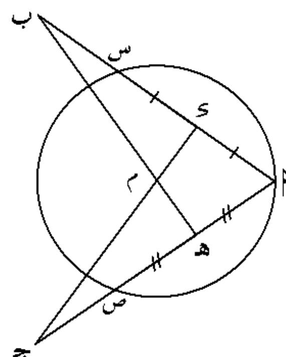
[٢٨] في الشكل المقابل

أ س ، أ ص وتران فى دائرة م ، ء منتصف أ س ،

هـ منتصف أ ص ، ء م ∩ أ ص = {ب}

فاذا كان أ ب = أ جـ

برهن أن أ س = أ ص





[٢٩] في الشكل المقابل

س ص ، س ع وتران فى دائرة م ،

وكان جـ ، ء منتصفا س ص ، س ع على الترتيب

م س ينصف (∠ جـ م ء) ، م جـ ، م ء يقطعان الدائرة م فى أ ، ب على الترتيب

اثبت أن : أ ص = ب ع

[٣٠] في الشكل المقابل

س ص وتر فى الدائرة م ، ع منتصف س ص ، رسم المستقيم م ع قطع الدائرة فى ل ، ط

اثبت أن : ق (∠ ل س ط) = ٩٠° ،

إذا كان س ص = ١٢سم ، ل ع = ٩سم . **احسب طول قطر الدائرة .**

[٣١] في الشكل المقابل

ب جـ قطر فى دائرة م ، أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٦٠°

ب س = ٢,٥سم ، م س ⊥ أ ب .

أوجد طول أ هـ

[٣٢] في الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، ب أ ∩ ء جـ = { هـ }

اثبت أن : هـ ب > هـ ء

هـ جـ > هـ أ

[٣٣] في الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، جـ ء وتر فيها

س جـ ⊥ جـ ء ، ص ء ⊥ جـ ء

اثبت أن : أ س = ب ص

[٣٤] فى مستوى احداثى متعامد اذا كان : أ ب قطر فى دائرة مركزها م حيث : أ (٣ ، ٤) ، ب (٣ ، - ٣) **أوجد احداثيي نقطة** م **ثم احسب محيط الدائرة** م



[٣٥] فى مستوى احداثى متعامد اذا كانت : م(– ١ ، ٢) ، ٢(٢ ، ٦) ، ب(٢ ، – ٢)

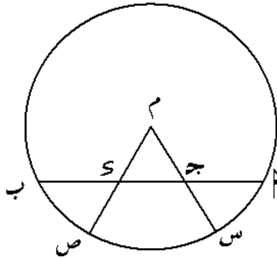
اثبت أن : م مركز دائرة مارة بالنقطتين ٢ ، ب **ثم احسب البعد العمودى للوتر** $\overline{٢ ب}$ **عن مركز الدائرة** م

[٣٦] في مستوى احداثى متعامد اذا كانت $\overline{٢ ب}$ وتر فى دائرة م ، ء منتصف $\overline{٢ ب}$ فاذا كانت :

٢(٤ ، ١) ، ب(– ٤ ، ٥) **فأوجد معادلة** $\overleftrightarrow{م ء}$

تمارين متميزة للمتفوقين

[٣٧] في الشكل المقابل

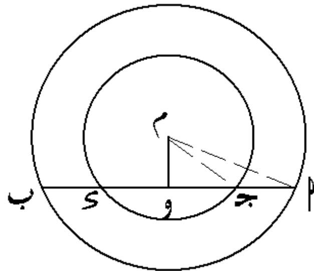


$\overline{٢ ب}$ وتر فى دائرة م ، $\overline{م س}$ ، $\overline{م ص}$ نصفى قطر للدائرة م ،

$\overline{م س} \cap \overline{٢ ب} = \{ء\}$ ، ٢ء = ب جـ

اثبت أن : جـ س = ء ص **برهن أن** ق(∠ ٢ س م) = ق(∠ ب ص م)

[٣٨] في الشكل المقابل

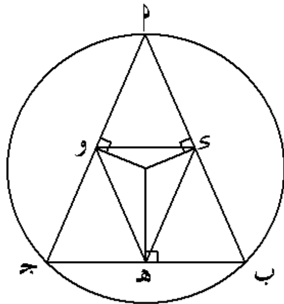


دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{٢ ب}$ وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء .

فاذا كان م ٢ = ٤ $\sqrt{٥}$ سم ، م منتصف $\overline{٢ ب}$ ، م و = ٤سم ، ٢ جـ = ٣سم .

فأوجد طول نصف قطر الدائرة الصغرى

[٣٩] في الشكل المقابل

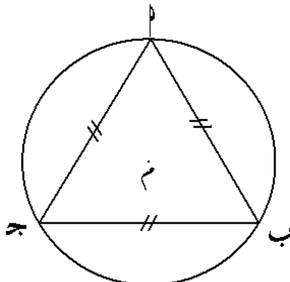


دائرة م ، $\overline{م ء} \perp \overline{٢ ب}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{ب جـ}$

، $\overline{م و} \perp \overline{٢ جـ}$.

اثبت أن : △ ء هـ و ~ △ ٢ ب جـ

[٤٠] في الشكل المقابل

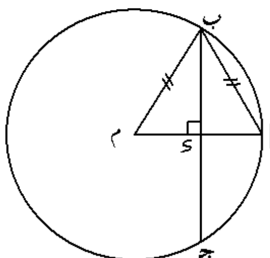


△ ٢ ب جـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م طول ضلعة = ١٢سم

فاذا كان م نقطة تلاقى المتوسطات △ ٢ ب جـ

فأوجد طول نصف قطر الدائرة م

[٤١] في الشكل المقابل



$\overline{٢ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ وتران فى الدائرة م ، ٢ ب = ب م ،

$\overline{م ٢} \perp \overline{ب جـ}$ ، ب جـ = ١٤ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م.

موضع نقطة بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع نقطة بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين البعد بين النقطة أ ومركز الدائرة م وليكن أ م فإذا كانت

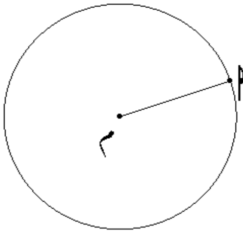
١. البعد أ م = نق **فان النقطة تقع على الدائرة.**

٢. البعد أ م > نق **فان النقطة تقع خارج الدائرة.**

٣. البعد أ م < نق **فان النقطة تقع داخل الدائرة.**

٤. البعد أ م = ٠ **فان النقطة فى تقع مركز الدائرة (داخل الدائرة) .**

إذا كان أ تقع على الدائرة

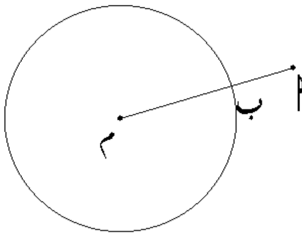


البعد أ م = نق فان النقطة تقع على الدائرة ، تقع على الدائرة.

م أ = نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { أ }

إذا كان أ تقع خارج الدائرة

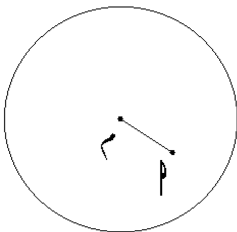


م أ > نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { ب }

النقطة تقع خارج الدائرة إذا كان البعد م أ ∋] نق ، ∞ [

إذا كان أ تقع داخل الدائرة



م أ < نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = ∅

النقطة تقع داخل الدائرة إذا كان البعد م أ ∋ [صفر ، نق [

مثال

دائرة م نصف قطرها ٧سم حدد موضع النقطة أ فى الحالات التالية

م أ = ٣سم ، م أ = ٨سم ، م أ = ٧سم ، م أ = ٢ نق ، م أ = $\frac{\text{نق}}{٣}$ ، م أ = ٥$\sqrt{٢}$

م أ = ٣سم فان ٣ < ٧ م أ < نق أ تقع داخل الدائرة

م أ = ٨سم ٨ > ٧ م أ > نق أ تقع خارج الدائرة

م أ = ٧سم ٧ = ٧ م أ = نق أ تقع على الدائرة

م أ = ٢ نق ٢نق > نق أ تقع خارج الدائرة

م أ = $\frac{\text{نق}}{٣}$ $\frac{\text{نق}}{٣}$ < نق أ تقع داخل الدائرة

م أ = ٢$\sqrt{٢}$ ٥$\sqrt{٢}$ > ٧ أ تقع خارج الدائرة لأن $(٥\sqrt{٢})^٢ > (٧)^٢$



موضع مستقيم بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع مستقيم ل بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين بعد مركز الدائرة م عن المستقيم ل وليكن م ا فإذا كان

١. ا م > نق كان المستقيم ل **يقع خارج الدائرة.**

٢. ا م = نق كان المستقيم ل **مماس للدائرة.**

٣. ا م < نق كان المستقيم ل **قاطع للدائرة.**

٤. ا م = صفر كان المستقيم ل **محور تماثل للدائرة.**

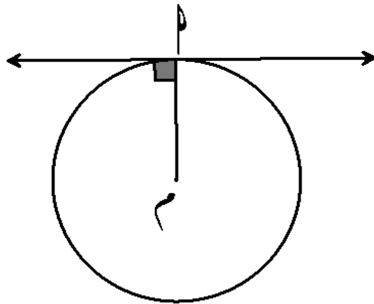
ملاحظات

المستقيم ل يقع **خارج الدائرة** إذا كان البعد ا م ∈] نق ، ∞ [

المستقيم ل يسمى **مماس** لدائرة إذا كان البعد ا م = نق

المستقيم ل يسمى **قاطع** لدائرة إذا كان البعد ا م ∈] صفر ، نق [

المستقيم ل يسمى **محور تماثل** لدائرة إذا كان البعد ا م = صفر



ل مماس للدائرة م

(ا) م ا = نق

إذا كان البعد العمودي م ا عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل مماس للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { ا }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

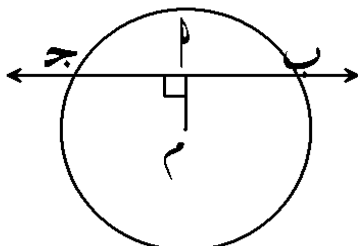
(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = { ا }

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

ل قاطع للدائرة م

(ا) م ا < نق

إذا كان البعد العمودي م ا عن المستقيم ل أقل من نق كان المستقيم ل قاطع للدائرة م



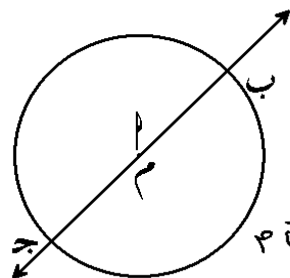
(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين كان المستقيم ل قاطع للدائرة

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{ب جـ}}$

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل يقع خارج الدائرة م



(أ) م أ > نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل خارج الدائرة م

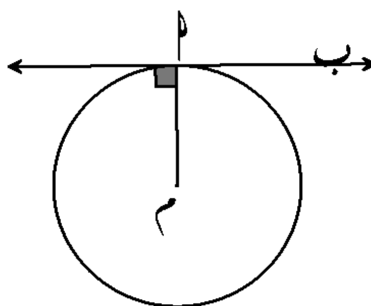
(ب) ل ∩ الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل خارج الدائرة

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل محور تماثل لدائرة م



(أ) م أ = صفر

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى صفر كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ } و يمر بالنقطة م

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين و يمر بالنقطة م كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م =

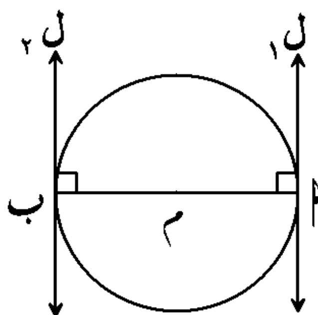
إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة و يمر بالنقطة م

كان المستقيم ل قاطع للدائرة

نتيجة ١

المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .

أى أن نصف القطر للدائرة يكون عمودى على المماس عند نقطة التماس



$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

م أ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ق(م أ ب) = ٩٠°

نتيجة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماس لها .

نتيجة ٣

المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان .

إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م وكان $\overline{أب}$ ⊥ $ل_١$ ، $\overline{أب}$ ⊥ $ل_٢$ فان

$ل_١$ ، $ل_٢$ مماسا للدائرة .

المماسان $ل_١$ ، $ل_٢$ عمودان على القطر $\overline{أب}$ ، و منها $ل_١$ // $ل_٢$

أى أن المماسان لدائرة عند نهايتى القطر يكونان متوازيان

موضع نقطة ومستقيم بالنسبة للدائرة

[١] أكمل ما يأتى

(١) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ ، ب } فان المستقيم ل يكون ....

(٢) دائرة م طول قطرها ١٠سم ، أ نقطة فى مستواها وكان م أ = ١٠سم فان أ .... الدائرة

(٣) إذا كان م دائرة محيطها ٨πسم ، أ نقطة على الدائرة فان : م أ = ...

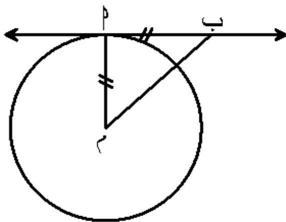
(٤) دائرة م طول نصف قطرها نق ، أ نقطة في مستوى الدائرة فإذا كان م أ = $\frac{٢نق}{٣}$ فان النقطة أ تقع .... الدائرة

(٥) دائرة م طول قطرها ٦سم فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها م مسافة ٦سم فان المستقيم ل يكون ....

(٦) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ فان المستقيم ل يقع ....

(٧) إذا كان المستقيم ل يقطع الدائرة م فى النقطتين أ ، ب فان المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ...

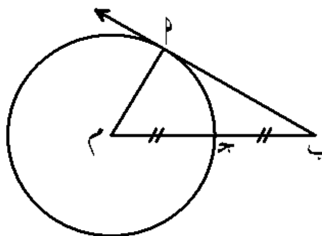
(٨) فى الشكل المقابل



إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسا للدائرة م عند أ ، أ ب = م أ

فان ق(∠ م) = ...°

(٩) فى الشكل المقابل



إذا كان $\overrightarrow{ب أ}$ مماسا للدائرة م عند أ ، ب جـ = م جـ فان

ق(∠ ب) = ...°

ق(∠ م) = ...° ، م أ = ... م ب

[٢] دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ٧سم ، م أ ⊥ ل حيث أ ∈ ل حيث أ نقطة فى مستوى الدائرة

حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م فى الحالات التالية

❶ إذا كان : م أ = ٤$\sqrt{٣}$ سم ❷ إذا كان : م أ = ٣$\sqrt{٧}$ سم ❸ إذا كان : م أ = ٥سم

❹ إذا كان : ٢ م أ - ٥ = ٩ ❺ إذا كان : م أ = ٢$\sqrt{٧}$ سم ❻ إذا كان : م أ = صفر

❼ إذا كان : المستقيم ل يقطع الدائرة م فى نقطتين ، م أ = ٣س - ٥ فان : س ∈ ....

❽ إذا كان : المستقيم ل يقطع الدائرة م فى نقطة واحدة ، م أ = س^{٢} - ٢ فان : س ∈ ....

❾ إذا كان : المستقيم ل لا يقطع الدائرة م ، م أ = ٢س - ١ فان : س ∈ ....

[٣] دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ٦سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة حدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى الحالات التالية

❶ إذا كان : م أ = ٨سم ❷ إذا كان : م أ = ٥سم ❸ إذا كان : م أ = ٣$\sqrt{٧}$ سم

❹ إذا كان : م أ = ٣$\sqrt{٦}$ سم ❺ إذا كان : م أ = صفر ❻ إذا كان : م أ = ٢$\sqrt{٥}$



[٤] إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = نق ، م ٩ ⊥ ل ، ٩ ∈ ل فحدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م

فى كلا من الحالات التالية ① ٩ م = نق ② ٩ م = ٣نق ③ ٩ م = $\frac{٤}{٥}$ نق

[٥] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت : م دائرة طول قطرها ٦سم ، ٩ نقطة على الدائرة فان : ....

(٩) م ٩ < ٦سم (ب) م ٩ = ٦سم (جـ) م ٩ = ٣سم (د) م ٩ > ٣سم

(٢) م دائرة طول نصف قطرها ٣سم ، ٩ نقطة بحيث م ٩ = ٧سم فان : ....

(٩) ٩ ∉ الدائرة م (ب) ٩ ∈ الدائرة م

(جـ) ٩ ∈ أحد أنصاف أقطار الدائرة (د) ٩ إحدى نقاط التماس

(٣) إذا كان المستقيم ل مماسا للدائرة م طول قطرها ٦سم فانه يبعد عن مركزها ....سم

(٩) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٤) دائرة م طول نصف قطرها ٥سم ، ٩ نقطة خارج الدائرة فان م ٩ يمكن أن تساوى .... سم

(٩) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ٤

(٥) م دائرة طول قطرها ٦سم فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة ٤سم فان المستقيم ل ....

(٩) قاطع للدائرة (ب) مماس للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) يمر بمركز الدائرة

(٦) ٩ ب قطر فى الدائرة م ، المستقيمان ٩ جـ ، ب ء مماسان للدائرة ، فان ٩ جـ .... ب ء

(٩) يقطع (ب) يوازى (جـ) عمودي على (د) ينطبق

(٧) دائرة م محيطها ٦π سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة ٣سم . فان المستقيم ل يكون ....

(٩) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) قطرا فى الدائرة .

(٨) دائرة م مساحتها ٢٥ π سم٢ ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة ٤سم . فان المستقيم ل يكون ....

(٩) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) قطرا فى الدائرة .

(٩) دائرة م مساحتها ٤٩π سم٢ ، و النقطة ٩ تبعد عن مركزها مسافة ٧سم . فان النقطة ٩ تقع ....

(٩) فى مركز الدائرة (ب) داخل لدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) على الدائرة .

(١٠) دائرة م طول قطرها ١٤سم فإذا كان المستقيم ل خارج الدائرة م فانه يبعد عن مركزها مسافة ∈ ....

(٩) [٠ ، ٧] (ب)] ٠ ، ٧ [(جـ)] ٠ ، ٧] (د)] ٤ ، ∞ [

(١١) إذا كانت ٩ نقطة فى مستوى الدائرة م ، طول نصف قطرها نق وكان صفر < م ٩ < نق فان ٩ تقع ...... الدائرة

(٩) خارج (ب) داخل (جـ) على (د) على مركز

(١٢) دائرة قطرها (٢ س + ٢)سم ، والمستقيم ل يبعد عنها مسافة س سم فان المستقيم ل يكون..........



(أ) قاطعا للدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) قطرا فى الدائرة . (د) مماسا للدائرة

(١٣) المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة يكونان ....

(أ) متعامدان (ب) متوازيان (ج) متساويان فى الطول (د) متقاطعان

(١٤) دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم فان المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) محور تماثل للدائرة

(١٥) ل يبعد عن مركزها ٤,٥سم فان المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) محور تماثل للدائرة

(١٦) دائرة طول قطرها ٨سم ، فإذا كان المستقيم ل مماسا للدائرة فانه يبعد عن مركزها مسافة

(أ) ٤سم (ب) ٨سم (ج) ١٦سم (د) ٢سم

(١٧) م دائرة طول نصف قطرها نق .فإذا كانت النقطة أ تقع فى مستواها بحيث م أ = $\frac{٣}{٤}$ نق سم فان النقطة أ تقع ....

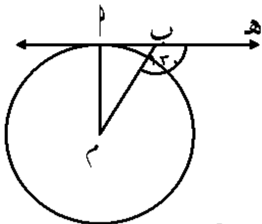
(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) فى مركز الدائرة

(١٨) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ فان المستقيم ل يكون .... الدائرة

(أ) قاطع (ب) خارج (ج) مماس (د) محور تماثل

(١٩) م دائرة طول قطرها ١٠سم ، فإذا كانت النقطة س تقع فى مستواها بحيث م س = ٦سم فان النقطة س تقع ......

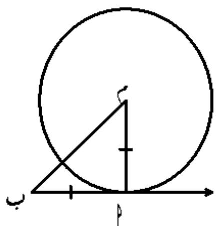
(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) فى مركز الدائرة



(٢٠) إذا كان : المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماسا للدائرة م عند أ ، ق(∠ م ب هـ) = ١٣٠°

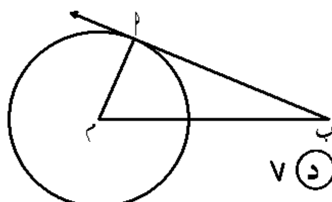
فان ق(∠ أ م ب) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (ج) ٦٠ (د) ٥٠



(٢١) إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماسا للدائرة م عند أ ، أ م = أ ب فان ق(∠م) = ... °

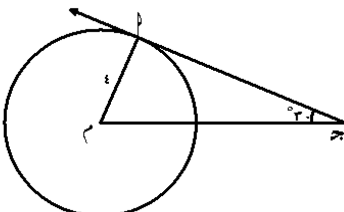
(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠



(٢٢) إذا كانت $\overleftrightarrow{أب}$ تمس الدائرة م عند أ ، أ م = ٥سم ، م ب = ١٣سم

فان : أ ب = ...سم

(أ) ١٩ (ب) ١٢ (ج) ٥ (د) ٧



(٢٣) $\overleftrightarrow{جـ أ}$ مماس للدائرة عند أ ، ق(∠ أ جـ م) = ٣٠° ،

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٤سم

فان : م جـ = ... سم



(أ) ٨ (ب) ٤ (ج) ٤$\sqrt{3}$ (د) ٨$\sqrt{3}$

(٢٤) $\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، $\overrightarrow{جأ}$ ، $\overleftrightarrow{جء}$ يمسان الدائرة م عند أ ، ء

فإذا كان : ق(∠ءمب) = ٥٠° فان : ق(∠ج) = ... °

(أ) ٥٠ (ب) ١٣٠ (ج) ٩٠ (د) ٤٠

(٢٥) إذا كانت : $\overline{أب}$ تمس الدائرة م عند أ ، $\overline{مب}$ ∩ الدائرة م = { ج }

حيث م ج = ب ج فان : ق(∠ب) = ... °

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠

(٢٦) دائرة م ، $\overline{أب}$ قطر فيها ، أ ب ج ء مربع طول ضلعه ٨سم

، $\overline{س ص}$ مماس // $\overline{أب}$

فان مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٦٤ (ب) ١٦ (ج) ٣٢ (د) ٨

(٢٧) إذا كانت $\overleftrightarrow{أج}$ يمس الدائرة م عند أ ، ء منتصف الوتر $\overline{أب}$

، ق(∠أجم) = ٥٠°

فان : ق(∠بأم) = ... °

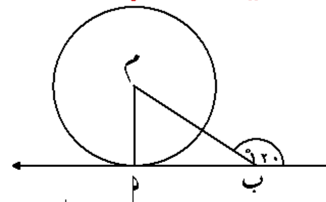
(أ) ٤٠ (ب) ٤٥ (ج) ٥٠ (د) ٩٠

[٦] دائرة م طول قطرها ٢ س سم ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها (س + ١) سم

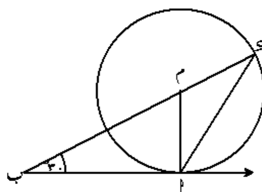
حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م

[٧] فى كل من الأشكال الآتية م دائرة ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس . أكمل

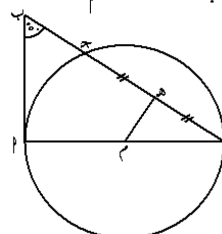
ق(∠أمب) = ... °



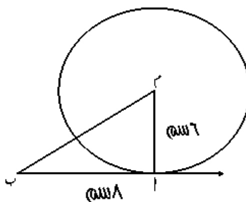
ق(∠أءب) = ... °



ق(∠ أمهـ) = ... °

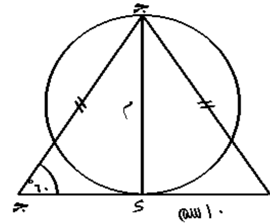


ء ب = ... سم

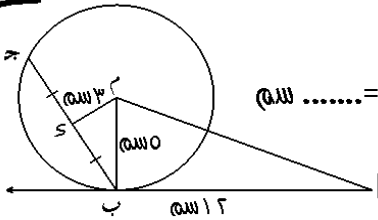




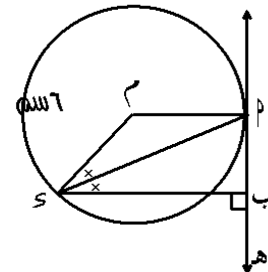
محيط △ ا ب جـ = ... سم

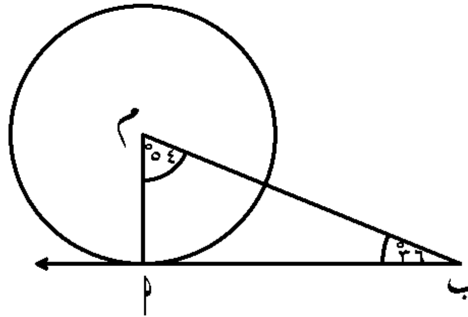


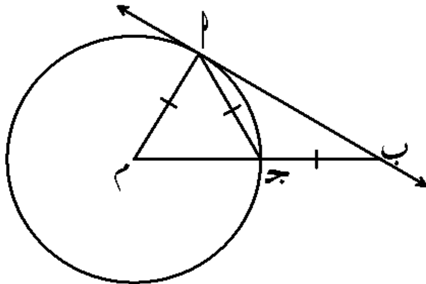
محيط الشكل ا ب م ء = ... سم



[٨] في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، وضح لماذا يكون المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$ مماس .





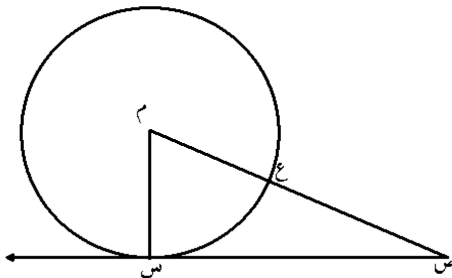


[٩] فى الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، س ص = ١٢سم

، $\overline{م ص}$ ∩ الدائرة = { ع } ، ع ص = ٨سم

اثبت أن : المستقيم $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة م عند س



[١٠] فى الشكل لمقابل

$\overline{ا ب}$ مماسية للدائرة م عند ب ، ق(∠ ا) = س ، ق (∠ م) = ٢س

اثبت أن : جـ منتصف $\overline{ا م}$ ، اذا كان : ا م = ١٤سم

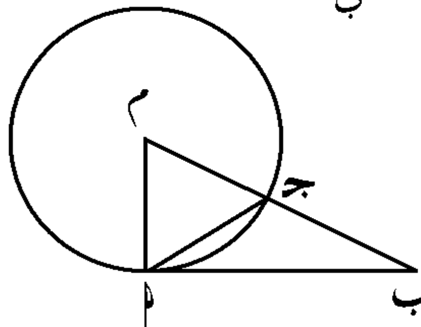
فأوجد مساحة سطح الدائرة م حيث ($\pi = \frac{22}{7}$)

[١١] فى الشكل لمقابل

$\overline{ا ب}$ مماس للدائرة م عند ا ، جـ منتصف $\overline{م ب}$.

أوجد ق(∠ ب ا جـ) . واذا كان ا ب = ٤√٣سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م ثم **احسب** مساحة سطح △ ا ب جـ

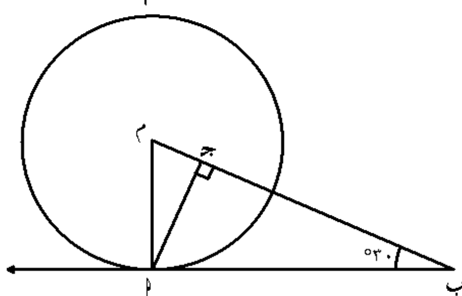


[١٢] فى الشكل المقابل

المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ مماس للدائرة م عند ا

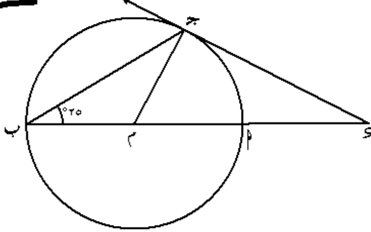
، م ا = ٨سم ، ق(∠ ا ب م) = ٣٠° ، $\overline{ا جـ}$ ⊥ $\overline{م ب}$

أوجد طول كلا من : $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$





[١٣] فى الشكل المقابل

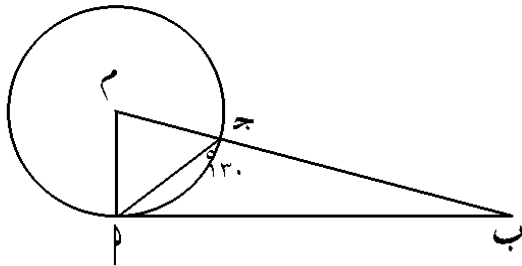


أ ب قطر فى الدائرة م ، ء ∈ ب أ

فاذا كان المستقيم ء جـ مماسا للدائرة عند جـ ، ق(∠ ب) = ٢٥ °

فأوجد : ق(∠ ء)

[١٤] فى الشكل لمقابل

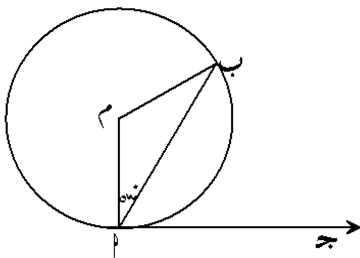


أ ب مماسة للدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = { جـ }

ق(∠ أ جـ ب) = ١٣٠ °

أوجد ق(∠ م) ، ق(∠ ب)

[١٥] فى الشكل لمقابل

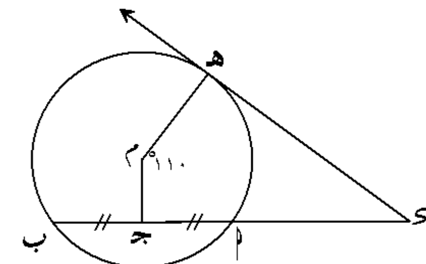


م دائرة أ جـ مماس لها عند أ

فإذا كان ق(∠ أ ب م) = ٤٠ °

أوجد ق(∠ ب أ جـ)

[١٦] فى الشكل لمقابل

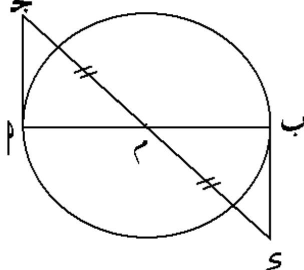


أ ب وتر فى الدائرة م ، ء هـ مماسا لها عند هـ ،

جـ منتصف أ ب

أوجد : بالبرهان ق(∠ ء)

[١٧] فى الشكل المقابل

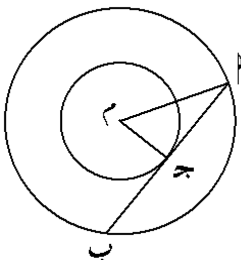


أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ مماسا لها عند أ

، رسم جـ م وفرضت عليه نقطة ء بحيث جـ م = م ء

اثبت أن : ب ء مماسا للدائرة عند ب

[١٨] فى الشكل المقابل

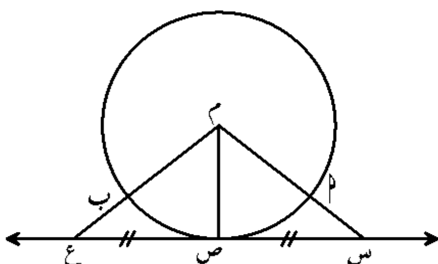


أ ب وتر فى الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى فى جـ ، أ ب = ٨سم

، طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم

أو جد : طول نصف قطر الدائرة الصغرى

[١٩] فى الشكل المقابل



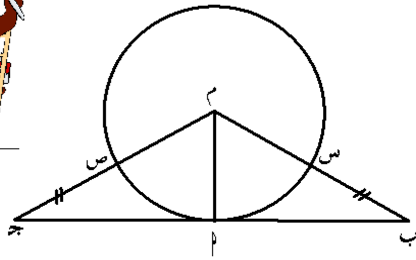
المستقيم س ع مماس للدائرة م عند ص

، س ص = ص ع

اثبت أن : أ س = ب ع



[٢٠] فى الشكل المقابل



المستقيم ب جـ مماس للدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = { س }

، م جـ ∩ الدائرة م = { ص } فإذا كان : ب س = جـ ص

فأثبت أن : ق(∠ ب م أ) = ق(∠ جـ م أ)

[٢١] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى دائرة م ، المستقيم ء هـ مماس للدائرة م عند ب ، ق(∠ أ) = ٢٥°

ق(∠ م جـ ب) ، ق(∠ ء ب جـ)

[٢٢] فى الشكل المقابل

ء جـ يمس الدائرة م عند جـ ، أ ب // م ء ، ق(∠ ب أ جـ) = ٨٠°

، ق(∠ م ء جـ) = ٢٠° ، أ جـ ∩ م ء = { هـ }

أوجد : ق(هـ جـ م)

[٢٣] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ ء ، ب جـ مماسان للدائرة عند أ ، ب

المستقيم ء جـ مماس للدائرة عند هـ

اثبت أن : ١) ق(أ ء هـ) + ق(ب جـ هـ) = ١٨٠°

٢) ق(أ م هـ) = ق(ب جـ هـ)

[٢٤] فى الشكل لمقابل

المستقيم ب ص مماسا للدائرة م عند ب

، أ ب // م جـ ،

ق(∠ أ ب ص) = ٥٠°

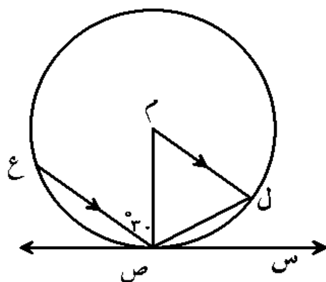
أوجد ق(∠ م جـ ب)

[٢٥] فى الشكل لمقابل

المستقيم س ص مماس للدائر م عند ص ،

ق(∠ م ص ع) = ٣٠° ، ل م // ص ع

أوجد ق(∠ ل م ص) ، ق(∠ ل ص س).





[٢٦] $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ قطران متعامدان فى الدائرة م ، رسم مماسان للدائرة م عند أ ، جـ بحيث كانا متقاطعان فى هـ

اثبت أن الشكل أ م جـ هـ مربع

[٢٧] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، $\overline{أجـ}$ قطعة مماسية للدائرة عند أ

، ق(∠ أ م ء) = ١٠٠° ،

أوجد ق(∠ ء أ م) ، ق(∠ جـ أ ء) ، ق(∠ أ ب ء)

[٢٨] فى الشكل المقابل

هـ منتصف $\overline{س ص}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ للدائرة الكبرى عند ب ، ق(∠ أ) = ٥٠°

احسب : ق(∠ هـ م ب)

اثبت أن : جـ س = ء ص

[٢٩] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ مماس لها عند أ ، ق(∠ ء أ جـ) = ٣٥°

أوجد ق(∠ ء أ م) ، ق(∠ أ م ء) ، ق(∠ أ ب ء) ، ق(∠ أ ء ب)

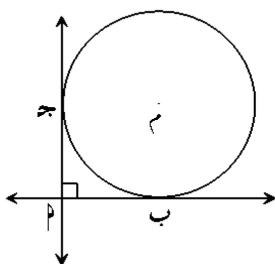
[٣٠] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماسا للدائرة عند هـ

بحيث $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب ء}$ متعامدان على المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$

اثبت أن هـ منتصف $\overline{جـ ء}$

وإذا كان أ ب = ١٠سم ، جـ هـ = ٤سم **فأوجد** مساحة شبه المنحرف أ ب ء جـ



[٣١] فى الشكل المقابل

المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ومتعامدان

اثبت أن ب جـ = $\sqrt{2}$ نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة م .وإذا كان محيط الدائرة م = ٤٤سم .

أوجد مساحة الشكل أ ب م جـ حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

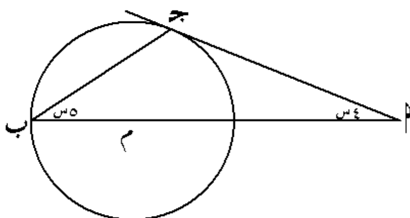
[٣٢] $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، المستقيمان $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماسان للدائرة م ، $\overleftrightarrow{جـ م}$ قطع الدائرة م فى س ، ص وقطع المستقيم $\overleftrightarrow{ب ء}$ فى هـ **اثبت أن** : جـ س = ص هـ

[٣٣] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{ء جـ}$ مماس للدائرة عند جـ .

ق(∠ ب) = ٥س ، ق(∠ ء) = ٤س

أوجد قيمة س ومن ثم أوجد ق(∠ ب جـ ء)



[٣٤] فى الشكل المقابل أ ب قطر فى الدائرة م ، المستقيم أ جـ مماس لها عند أ

فإذا كانت معادلة المستقيم أ جـ : س – ٣ ص = ١ ، معادلة ب ء : ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ٢

اثبت أن : المستقيم ب ء مماس للدائرة م عند ب

[٣٥] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتى المركز م ، طول نصف قطر الدائرة الكبرى نق١ ، طول نصف قطر الدائرة الصغرى نق٢

، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى فى جـ ، أ ب = ٧سم

أوجد : مساحة المنطقة المظللة وكذلك محيطها اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

[٣٦] فى الشكل المقابل

أ ب تمس الدائرة م عند ب ، جـ ء قطر فيها ، ق(∠ ب أ م) = س°

، ق(∠ م ء ب) = ٢س° **أوجد** قيمة س بالدرجات

[٣٧] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، أ ب مماس مشترك لهما ، جـ منتصف أ ب

، الدائرة م ∩ م جـ = { س } ، الدائرة ن ∩ ن جـ = { ص }

اثبت أن : ① أ ب // م ن ② △ جـ م ن متساوى الساقين .

③ س ص // م ن

[٣٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان رسمت م أ مماسة للدائرة ن عند أ ،

ثم رسمت ن ب مماسة للدائرة م عند ب **اثبت أن** أ م ب ن مستطيل

[٣٩] أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم أ م فقطع الدائرة فى ب بحيث ب ∉ أ م ، والنقطة جـ ∈ الدائرة م ،

رسم أ جـ فقطع الدائرة فى ء فإذا كان أ ء = م ء **اثبت أن :** ق(ب م جـ) = ٣ ق(م أ ء)

[٤٠] عين كموضع النقط الآتية بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ وحدات طول علما بأن م(٠ ، ٠)

، أ(–٣ ، ٤) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٨) **أوجد** طول نصف قطر الدائرة المارة بالنقطة (–٣ ، ٤) و مركزها نقطة الأصل

[٤١] فى مستوى احداثى متعامد رسمت دائرة م حيث م(–١ ، ٢) ، نقطة أ(٣ ، ٥) تقع على الدائرة م

، نقطة ب(٦ ، ١) تقع فى مستواها **اثبت أن :** أ ب مماس للدائرة م عند أ **وأوجد معادلته** .

[٤٢] اثبت أن النقط أ(٤ ، –٤) ، ب(–٢، –٦) ، جـ(٦ ، ١٠) تقع على دائرة واحدة مركزها م(–٢ ، ٤)

ثم أوجد محيط هذه الدائرة ومساحة سطحها .

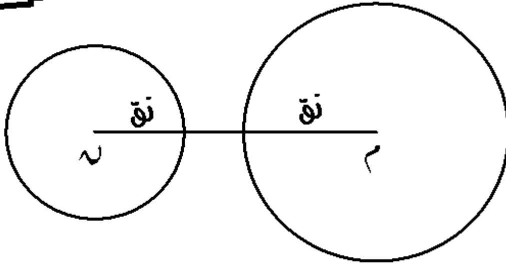
[٤٣] أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها م(٢ ، –٣) وتمر بالنقطة ن(–١ ، ١)

ثم بين موضع كل من النقط أ(١ ، ١) ، ب(–٢ ، ٠) ، جـ(–٤ ، ٥) بالنسبة للدائرة م



موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى :

[١] الدائرتان المتباعدتان :

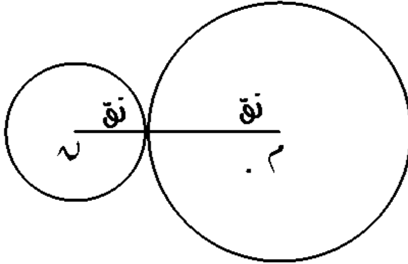


❶ م ن > $نق_1 + نق_2$

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅

[٢] الدائرتان المتماستان من الخارج :

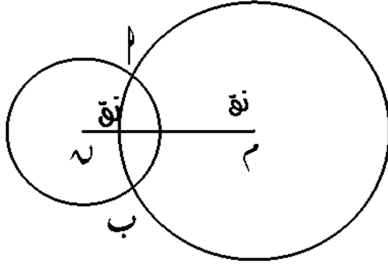


❶ م ن = $نق_1 + نق_2$

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

[٣] الدائرتان المتقاطعتان :

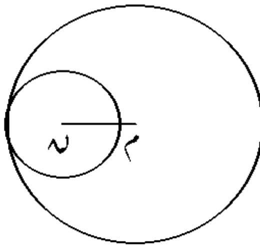


❶ $نق_1 - نق_2$ < م ن < $نق_1 + نق_2$

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

❸ أى دائرتان تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

[٤] الدائرتان المتماستان من الداخل :

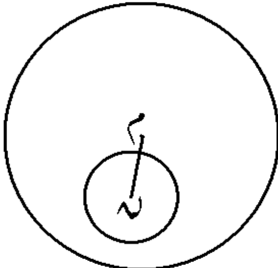


❶ م ن = $نق_1 - نق_2$

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

[٥] الدائرتان المتداخلتان :

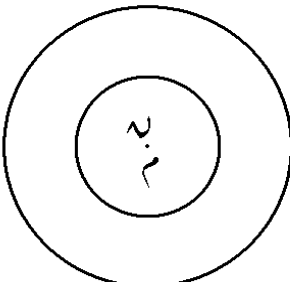


❶ م ن > $نق_1 - نق_2$

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

[٦] الدائرتان المتحدتان فى المركز :



❶ م ن = صفر

❷ الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

❸ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن



الدائرتان متباعدتان

الجموع ⊕ ← الدائرتان متماستان من الخارج

الدائرتان متقاطعتان

الطرح ⊖ ← الدائرتان متماستان من الداخل

الدائرتان متداخلتان

الدائرتان متحدتان فى المركز م ن = ٠

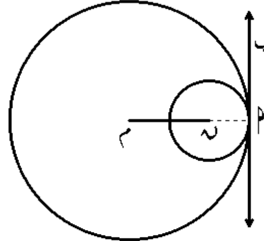
نتيجة ١:

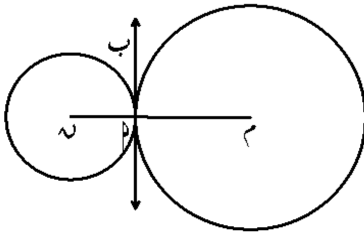
خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس

∵ م ن خط مركزين

∵ أ ب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب





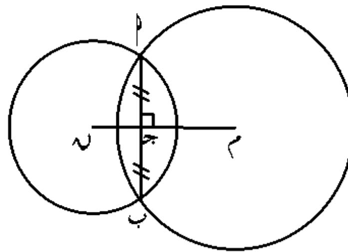
نتيجة ٢:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك و ينصفه

∵ م ن خط مركزين

∵ أ ب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب



ملاحظات هامة

١ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين محور تماثل للوتر المشترك

٢ الوتر المشترك عمودى على خط المركزين فقط

٣ خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك

٤ خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يمر بنقطة التماس



تمارين على موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخري

[١] اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة

(١) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون .... الوتر المشترك و........

(٢) خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل (الخارج) يمر ....

(٣) م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب فان محور تماثل الدائرتين ....

(٤) إذا كان سطح الدائرة التى مركزها م ∩ سطح الدائرة التى مركزها ن = ∅ فان الدائرتان م ، ن تكونان ....

(٥) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج طول نصف قطر أحدهما ٣سم ، م ن = ٨سم
فان طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم

(٦) دائرتان م ، ن متماستان من الداخل وطولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٥سم فان طول $\overline{م ن}$ = ...سم

(٧) دائرتان طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٦سم ، البعد بين مركزيهما ٩سم فان الدائرتين م ، ن تكونان ....

(٨) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ فان الدائرتان م ، ن إما أن تكون .... أو ....

(٩) محور تماثل الدائرتين م ، ن المتقاطعتين فى أ ، ب هو .... خط المركزين لدائرتين متماستين من (الداخل أو الخارج) يكون عموديا على ....

(١٠) اذا كان الدائرتان م ، ن متباعدتان فان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ...

(١١) م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٤سم على الترتيب فان : م ن ∈ ....

(١٢) إذا كان الدائرتان م ، ن متحدتى المركز فان الدائرة م ∩ الدائرة ن = ...

(١٣) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ } فان الدائرتان م ، ن إما أن تكون .... أو ....

(١٤) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على .... و ....

(١٥) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فان الدائرتان م ، ن تكونان ....

(١٦) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة الصغرى ن فان الدائرتان م ، ن تكونان .... أو........

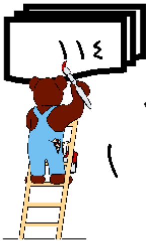
[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسان

(١) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٣سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٢) إذا كان م ، ن دائرتان نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ حيث م ن < $نق_1$ + $نق_2$ فان الدائرتان م ، ن
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٣) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٧سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٩سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٤) إذا كان م ، ن دائرتان نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ حيث م ن = $نق_1$ + $نق_2$ فان الدائرتان م ، ن
(متماستان من الخارج ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)



(٥) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٣سم فإذا كان م ن = ١٢سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٦) إذا كان م ، ن دائرتان نصفى قطريهما $نق_١$ ، $نق_٢$ حيث $نق_١ - نق_٢ < م ن < نق_١ + نق_٢$
فان الدائرتان م ، ن .... (متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٧) إذا كان مجموع طولى نصفى قطرين لدائرتين يساوى البعد بين مركزيهما تكون الدائرتان............
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متداخلتان)

(٨) دائرتان م ، ن متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٥سم ، ٦سم فان م ن يمكن أن تساوى ....
(١١ ، ١ ، ٥ ، ١٣)

(٩) إذا كان طول نصف قطر دائرة م هو ٣سم وطول نصف قطر الدائرة ن = ٧سم وكانت الدائرتان م ، ن متداخلتان
فان م ن = ... (٤ ، ١٠ ، ٥ ، ٢)

(١٠) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٦سم فإذا كان م ن = $٨\sqrt{٢}$سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(١١) م ، ن دائرتان متماستان حيث م ن = ٦سم ، ونصف قطر الدائرة الكبرى ١٠سم

(١٢) فيكون نصف قطر الدائرة الصغرى = ... سم (١٦ ، ١٢ ، ٨ ، ٤)

(١٣) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٨سم فإذا كان م ن = ٥سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(١٤) دائرة م نصف قطرها ٤سم تمس دائرة ن من الخارج فإذا كان م ن = ٧سم فان محيط الدائرة ن .... سم
(٤π ، ٦π ، ٧π ، ٨π)

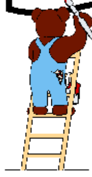
(١٥) إذا كان طول نصف قطر دائرة م هو ٣سم وطول نصف قطر الدائرة ن = ٥سم وكانت الدائرتان م ن= ٦سم
فان م ، ن دائرتان .... (متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(١٦) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج ، طول قطر أحدهما ٦سم ، ٢م ن = ٨سم
فان طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

(١٧) دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب فان محور تماثل $\overline{أب}$ هو.................
($\overline{م ن}$ ، $\overleftarrow{ن م}$ ، المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ ، $\overleftarrow{م ن}$)

(١٨) دائرة م طول نصف قطرها ٤سم تمس دائرة ن من الداخل ، م ن = ٧سم فان محيط الدائرة م:محيط الدائرة ن = ...
(٤ : ٧ ، ٣ : ٤ ، ٤ : ٣ ، ٤ : ١١)

(١٩) دائرتان م ، ن متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٧سم فان م ن =...............
(٤ ، ٢ ، ٥ ، ١٠)



(٢٠) إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = طول نصف قطر الدائرة ن = م ن فان الدائرتان ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٢١) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٢سم فإذا كان م ن = ٣سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٢٢) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٢سم فإذا كان م ن =................
(٤ ، ٦ ، ٢ ، ٨)

(٢٣) دائرتان م ، ن متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٥سم فإذا كان م ن ∈ ....
( ] ٠ ، ٢ [،] ٢ ، ٨ [،] ٨ ، ∞ [،] ٢ ، ∞ [ )

(٢٤) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك و..........
(يساويه ، يساويه وينصفه ، ينصفه ، يوازيه)

(٢٥) إذا كان الدائرة التى مركزها م ∩ الدائرة التى مركزها ن = { أ ، ب } فان الدائرتان م ، ن تكونان ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

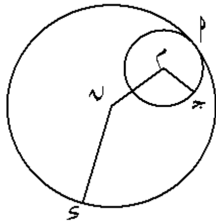
(٢٦) إذا كان سطح الدائرة التى مركزها م ∩ سطح الدائرة التى مركزها ن = سطح الدائرة ن فان الدائرتان م ، ن تكونان.......
(متماستان من الخارج ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٢٧) إذا كان مجموع طولى نصفى قطرى دائرتين = البعد بين مركزيهما فان الدائرتين
(متماستان من الخارج ، متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متحدتى المركز)

(٢٨) إذا كان م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٤سم ، من = ٢سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متماستان من الخارج ، متداخلتان ، متباعدتان)

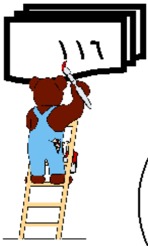
(٢٩) أ ب وتر فى دائرة م طولة ٦سم وكان بعده العمودى عن المركز الدائرة ٤سم ، فإذا كانت جـ ∈ م أ بحيث م جـ = ٦سم
فان جـ تقع .... (على الدائرة ، خارج الدائرة ، داخل الدائرة ، على الوتر أ ب)

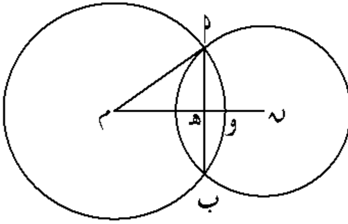
(٣٠) فى الشكل المقابل م ، ن دائرتان متماستان من الداخل فى أ
فإذا كان م جـ = ٤سم ، ن ء = ٩سم فان م ن = ...
(١٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٨)



[٣] دائرتان مركزيهما م ، ن طولا نصفى قطريهما ٥سم ، ٣سم . أوجد طول م ن فى الحالات التالية
① م ، ن متماستان من الداخل ② م ، ن متماستان من الخارج

[٤] دائرتان م ، ن طولى نصفى قطريهما ٧سم ، ٣سم على الترتيب حدد موضع الدائرتين م ، ن فى الحالات التالية
① م ن = ١٠سم ② م ن = ٤سم ③ م ن = صفر
④ م ن = ٨سم ⑤ م ن = ٢سم ⑥ م ن = ١٥



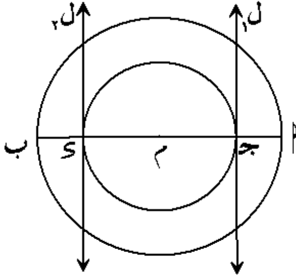


[٥] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، أب ∩ م ن = { هـ }

م ن ∩ الدائرة م = { و } ، أ ب = ٦سم ، م أ = ٥سم ، م ن = ٧سم .

أوجد طول أ هـ ، هـ و ، م ن



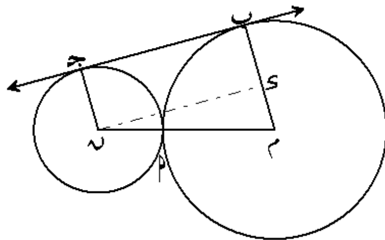
[٦] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتى المركز فى م ، أ ب قطر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى عند جـ ، ء ،

ل١ ، ل٢ مماسان للدائرة الصغرى عند جـ ، ء

اثبت أن : ل١ // ل٢

اثبت أن : أ جـ = ب ء ، أ ء = ب جـ

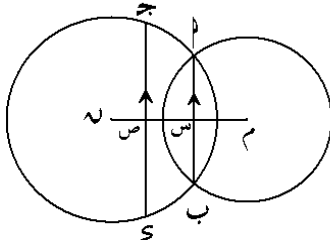


[٧] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند أ ، ب جـ مماس مشترك لهما

فإذا كان طولا نصفى قطريهما ١٨سم ، ٨سم على الترتيب

أوجد مساحة سطح الشكل م ب جـ ن

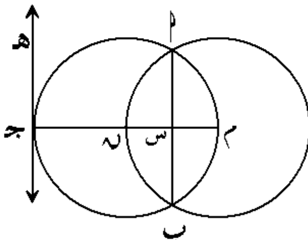


[٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، م ن ∩ أ ب = { س }

جـ ء // أ ب ، م ن ∩ جـ ء = { ص }

اثبت أن : ص منتصف جـ ء

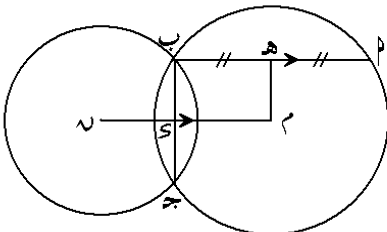


[٩] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان و متقاطعتان فى أ ، ب ، م ∈ الدائرة ن ،

ن ∈ الدائرة م ، المستقيم جـ هـ مماس للدائرة ن عند جـ

اثبت أن ① أ ب // جـ هـ ② م س = س ن

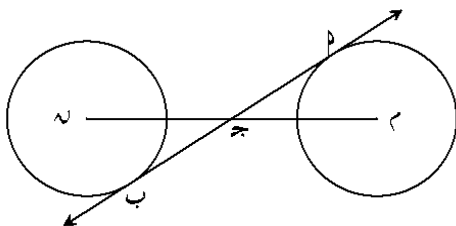


[١٠] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى جـ ، ب ، م ن ∩ أ ب = { س }

أ ب // ب جـ = { ء } ، هـ منتصف أ ب

اثبت أن هـ ء = طول نصف قطر الدائرة م .



[١١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ،

المستقيم أ ب مماس مشترك للدائرتان م ، ن عند أ ، ب

برهن أن : جـ منتصف كلا من أ ب ، م ن

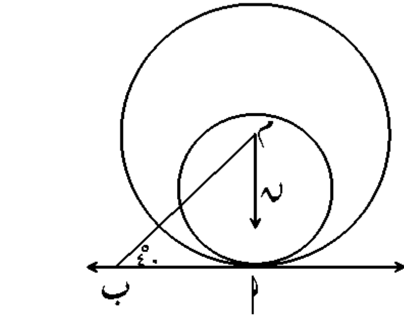


(١٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، هـ منتصف جـ د

أ ب مماس مشترك عند أ ، ق(∠ب) = ٧٠°

احسب : ق(∠هـ م ن)

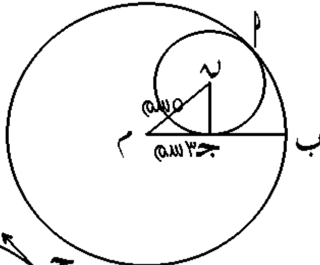


(١٣) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ،

المستقيم أ ب مماس مشترك عند أ ، إذا كان ق(∠ب) = ٤٠°

احسب : ق(∠ن م ب)

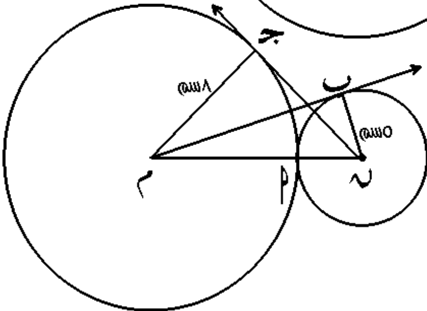


(١٤) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ،

سم م ب مماس للدائرة ن عند جـ ، م جـ = ٣سم ، م ن = ٥سم

احسب : طول ب جـ

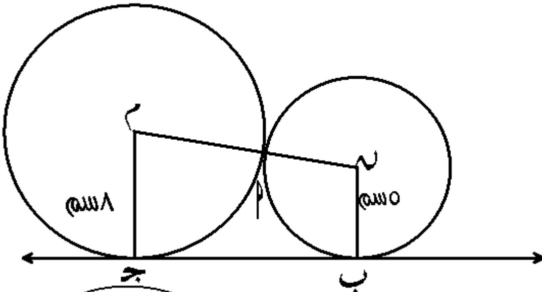


(١٥) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند أ ، سم م ب مماس للدائرة ن عند ب

، سم ن جـ مماس للدائرة م عند جـ ،

م جـ = ٨ سم ، ن ب= ٥سم   احسب : طول ن جـ ، م ب



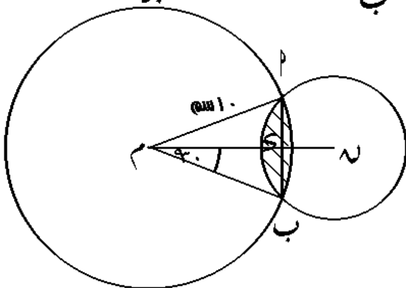
(١٦) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند أ ،

ب جـ مماس مشترك عند جـ ، ب على الترتيب

ن ب = ٥سم ، م جـ = ٨سم

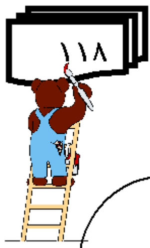
احسب : احسب طول ب جـ



(١٧) فى الشكل المقابل

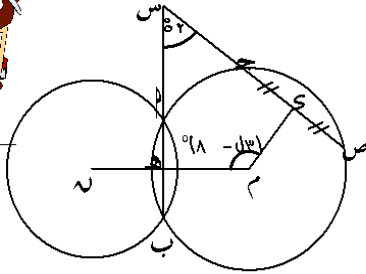
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب .

م أ = ١٠سم ، ق(∠ب م د) = ٣٠°   احسب طول أ ب



[١٨] فى الشكل المقابل

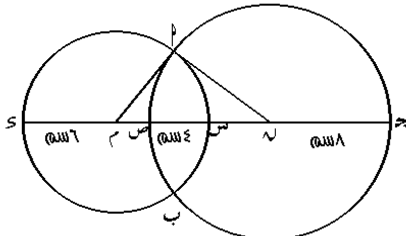
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٢ ، ب .
ء منتصف صَ جـ ، ق(س) = ٥٢°
، ق(∠ ء م هـ) = (٣ل − ٨)° احسب قيمة ل



[١٩] ادرس الشكل ثم اكمل مكان النقط

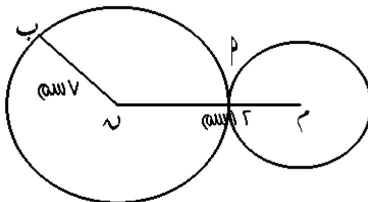
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٢ ، ب طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٦سم على الترتيب
، س ص = ٤سم ص م = ... سم ، جـ س = ...سم
، جـ ء = ... سم هل محيط △ ٢ ن م = طول جـ ء ؟ فسر إجابتك .

احسب ① ق(∠ ن ٢ م) ② احسب مساحة △ ن ٢ م ③ احسب طول الوتر المشترك ٢ ب .



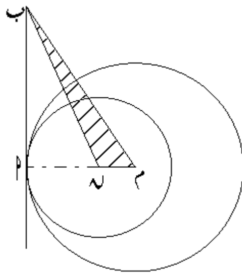
[٢٠] فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متماستان من الخارج عند ٢
، البعد بين مركزيهما م ن = ١٢سم ، فإذا كان : ن ب = ٧سم .
أوجد طول ٢ م



[٢١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠سم ، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل
، المستقيم ٢ب مماس مشترك لهما عند ٢ ، إذا كانت مساحة △ ب م ن = ٢٤سم²
أوجد : طول ٢ ب



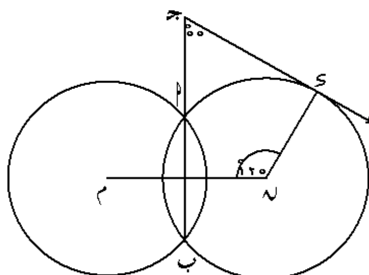
[٢٢] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٢ ، ب . فإذا كان ٢ب ∩ م ن = { هـ }
، ٢ جـ وتر فى الدائرة م ، ء منتصف ٢ جـ ، ق(∠ م) = ١١٠°

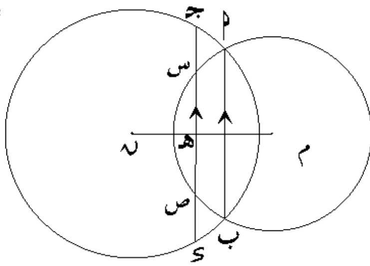
أوجد : ق(∠ ب ٢ جـ)

[٢٣] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٢ ، ب . وكانت جـ ∈ ب٢
، ء ∈ الدائرة ن ، ق(م ن ء) = ١٢٥° ، ق(∠ب جـ ء) = ٥٥°
أثبت أن : المستقيم جـ ء مماس للدائرة ن عند ء







[٢٤] فى الشكل المقابل

أ ب الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن ، المستقيم جـ ء // أ ب

ويقطع الدائرة م فى س ، ص ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء

أثبت أن : جـ س = ء ص

[٢٥] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، أ ب ∩ م ن = { جـ }

، ب ء قطر فى الدائرة م ، ب جـ = ٤سم ، م ء = ٥سم

احسب طول أ ء

[٢٦] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب حيث جـ ء قطر فى الدائرة م

، جـ س للدائرة م عند جـ حيث جـ س ∩ ب أ = { هـ }

، المستقيم م ن ∩ أ ب = { و }

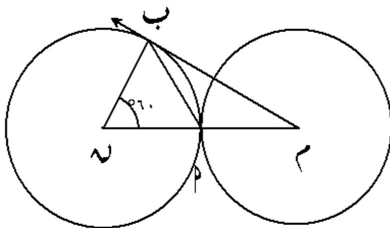
أثبت أن : ق(∠ ء م ن) = ق(∠ جـ هـ ب)

[٢٧] فى الشكل المقابل

ثلاث دوائر م ، ن ، ء متماسة مثنى مثنى أطوال أنصاف أقطارها

٢سم ، ٣سم ، ١سم على الترتيب احسب ق(∠ م ء ن)

[٢٨] فى الشكل المقابل



دائرتان م ، ن متطابقتان ومتماستان من الخارج فى أ

، رسم فى الدائرة ن نصف القطر ن ب

بحيث ق(∠ أ ن ب) = ٦٠° . أثبت أن : م ب تمس الدائرة ن فى ب

[٢٩] دائرتان م ، ن متباعدتان ، رسم م ن فقطع الدائرة م فى أ ، وقطع الدائرة ن فى ب ،

ورسم أ ء مماسا للدائرة م ، ورسم ب جـ مماسا للدائرة ن أثبت أن أ ء // ب جـ

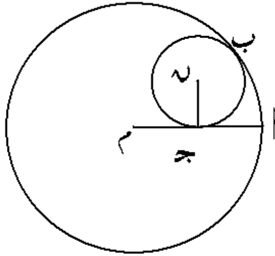


[٣٠] فى الشكل المقابل

دائرتان متماستان من الداخل عند ٢ ، مساحة المنطقة المظللة ٥٥٠ سم^2 ، م ن = ٧سم

أوجد مجموع طولى نصفى قطريهما . اعتبر ($\pi = \frac{22}{7}$)

[٣١] فى الشكل المقابل

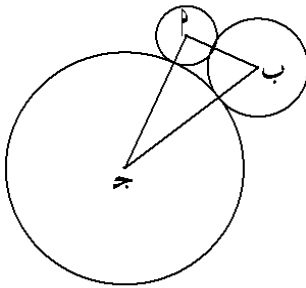


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل

نصف قطر الدائرة م = ٩سم ، نصف قطر الدائرة ن = ٤سم

$\overline{م ٢}$ نصف قطر للدائرة م ، يمس الدائرة ن عند ج . احسب طول $\overline{٢ ج}$

[٣٢] فى الشكل المقابل



٢ ، ب ، ج ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى

أطوال انصاف أقطارها ٢سم ، ٣سم ، ١٠سم على الترتيب

أثبت أن : ① ق(∠ ب ٢ ج) = ٩٠°

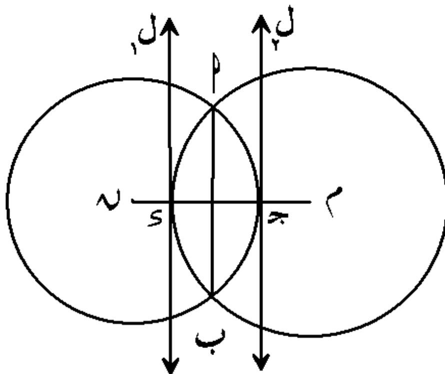
② احسب مساحة △ ٢ ب ج

تمارين متميزة للمتفوقين

[٣٣] م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ٢ ، رسمت $\overline{ن ب}$ مماسة للدائرة م عند ب فقطعت الدائرة ن فى ج

بحيث كان ب ج = $\frac{1}{2}$ ج ن ، ب ن = ١٢سم . أوجد مساحة سطح △ م ب ن

[٣٤] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٢ ، ب ، $\overline{م ن}$ ∩ الدائرة ن = { ج } .

رسم المماس ل١ للدائرة م عند ء ، رسم المماس ل٢ للدائرة ن عند ج

أثبت أن : ل١ // ل٢ // $\overline{٢ ب}$

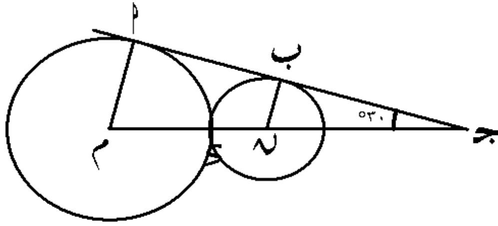
[٣٥] م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٢ ، ب . $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس مشترك لهما عند س ، ص . $\overline{ج ء}$ // $\overleftrightarrow{س ص}$

٢ ∈ $\overline{ج ء}$. أثبت أن : س ص = $\frac{1}{2}$ ج ء



[٣٦] دائرتان مركزيهما ن ، م متقاطعتان فى أ ، ب و النقطة جـ منتصف $\overline{\text{م ن}}$ ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ عمودى على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فقطع الدائرة ن فى ء و الدائرة م فى هـ اثبت أن : أ ء = أ هـ

[٣٧] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ء اذا مد المماس المشترك للدائرتين ليتلاقى مع امتداد خط المركزين عند جـ

وكان ق (∠ جـ) = ٣٠ ° فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٦سم . أوجد : طول نصف قطر الدائرة ن

[٣٨] دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب . فإذا قطع $\overrightarrow{\text{م ن}}$ الدائرة ن فى س ، رسم $\overrightarrow{\text{س أ}}$ فقطع الدائرة م فى جـ ، رسم $\overrightarrow{\text{س ب}}$ فقطع الدائرة م فى ء

اثبت أن : ① ق (∠ أ س ن) = ق (∠ ب س ن)   ② أ جـ = ب ء

③ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

(ارشاد : ارسم $\overrightarrow{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ يقطعه فى ص ، $\overrightarrow{\text{م ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ يقطعه فى ع)

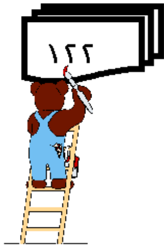
[٣٩] فى مستوى احداثى متعامد رسمت دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٦ وحدات طول ، ٤ وحدات طول على الترتيب بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى كل لحالات الآتية

① م (–٤ ، ٨) ، ن (٥ ، –٤)

② م (٢ ، ١) ، ن (٦ ، –٢)

[٤٠] فى مستوى احداثى متعامد اذا اكانت الدائرتان م ، ن متقاطعتين فى أ ، ب حيث أ (٠ ، ٣) ، ب (–٤ ، –١) فأوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$

[٤١] إذا كانت م (٣ ، ٥) ، ن (–٣ ، –٧) مركزى دائرتين طولا نصفى قطريها ٤ $\sqrt{5}$ سم ، ٢ $\sqrt{5}$ سم على الترتيب ، أ (–١ ، –٣)   اثبت أن : الدائرتين م ، ن متماستان عند أ مبينا نوع التماس .



تعيين الدائرة

❶ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة

❷ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين

❸ يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

❹ يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقاط لا يجمعهم مستقيم واحد

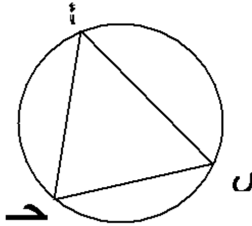
❺ يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقاط ∌ مستقيم واحد

❻ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة

❼ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط يجمعهم مستقيم واحد

❽ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط ∋ مستقيم واحد

الدائرة الخارجة للمثلث



الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع (تلاقى) محاور تماثل أضلاعة

أو الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث

١- مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد الزوايا تقع داخل المثلث .

٢- مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث .

٣- مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية تقع فى منتصف وتره .

٤- مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة و هى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته

نظرية

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها

نتيجة : الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز

عكس النظرية

فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول



تمارين على تعيين الدائرة

[١] اكمل مكان النقط

(١) تتعين الدائرة اذا علم .... ، ....

(٢) عدد الدوائر المارة بثلاث نقط لتنتمى لمستقيم واحد ....

(٣) مركز الدائرة الخارجة المارة برؤوس المثلث هى ....

(٤) نقطة تلاقى محاور تمثل أضلاع المثلث هى مركز الدائرة ....

(٥) اذا كان طول $\overline{أب}$ = ٦سم ، فان طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب = ...سم

(٦) نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على اضلاع المثلث من منتصفاتها هى مركز الدائرة ....

(٧) عدد الدوائر التى طول نصف قطر كل منها ٤سم وتمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٦سم = ...

(٨) مثلث قائم الزاوية فاذا كان طولا ضلعى القائمة ٦سم ، ٨سم

(٩) فان مساحة سطح الدائرة المارة رؤوسة = ...سم² اعتبر ($\pi = \frac{22}{7}$)

(١٠) الدائرة المارة برؤوس المثلث تسمى ....

(١١) عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بثلاث رؤوس لمتوازى أضلاع هو ....

(١٢) اذا كان أ ب= ٦سم فان عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٥سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(١٣) اذا كانت أ ب = ٧سم فان محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب = ... سم

(١٤) عدد الدوائر المارة بنقطة معلومة ....

(١٥) عدد الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين أ ، ب ....

(١٦) عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط معلومة أ ، ب ، جـ ....

(١٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ∈ الدائرة م ، وأيضا أ ، ب ، جـ ∈ الدائرة ن ، فان الدائرة م ...... الدائرة ن

(١٨) عدد الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب ومركزها يقع على مستقيم ل .....حيث ل لا يوازى محور القطعة $\overline{أب}$ ولا ينطبق عليه .

(١٩) عدد الدوائر التى نصف قطرها ٣سم والتى مراكزها على مستقيم معلوم ل والتى يمر كل منها بنقطة معلومة أ ∈ ل هو........

(٢٠) .... لدائرتان متقاطعتان هو محور تماثل وترهما المشترك .

(٢١) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفها تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة هى ....

(٢٢) إذا كانت ك نقطة داخل دائرة ورسم منها عدة قطع مستقيمة متساوية فى الطول طرفها الآخر على الدائرة فان ك هى ......

(٢٣) أ ، ب نقطتان فى المستوى حيث أ ب = ٦,٢سم فان عدد الدوائر التى نصف قطر كل منها ٣,١سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(٢٤) أكبر طول لقطعة مستقيمة يقع طرفيها على الدائرة التى طول نصف قطرها ٦سم = ... سم

(٢٥) اذا كانت أ ب = ١٤سم فان مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب = ... سم²

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

[٢] اختر الإجابة الصحيحة

(١) أى ثلاث نقط لا تنتمي لمستقيم واحد تمر بها
(أ) دائرة وحيدة (ب) دائرتان (ج) ثلاث دوائر (د) عدد لانهائي من الدوائر

(٢) يمكن رسم .... تمر بالنقطتين أ ، ب
(أ) دائرة وحيدة (ب) دائرتان (ج) ثلاث دوائر (د) عدد لانهائي من الدوائر

(٣) يمكن رسم .... تمر بنقطة معلومة
(أ) دائرة وحيدة (ب) دائرتان (ج) ثلاث دوائر (د) عدد لانهائي من الدوائر

(٤) مركز الدائرة الخارجة عن المثلث هي نقطة تلاقى ....
(أ) ارتفاعاته (ب) متوسطاته (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

(٥) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....
(أ) المعين (ب) المستطيل (ج) متوازي الأضلاع (د) شبه المنحرف بصفة عامة

(٦) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....
(أ) المثلث (ب) المربع (ج) المستطيل (د) المعين

(٧) أ ، ب نقطتان حيث أ ب = ٦سم . فان عدد الدوائر الى طول نصف قطر كل منها ٥سم وتمر بالنقطتين أ، ب = ...
(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٢

(٨) عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأي ثلاث نقط على استقامة واحدة يساوى
(أ) ٣ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

(٩) عدد لانهائي جميع الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع مراكزها جميعا على ....
(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (ج) محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ (د) نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

(١٠) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....
(أ) مستطيل (ب) معين (ج) مربع (د) مثلث

(١١) إذا كانت : $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة طولها ٦سم فان طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو ....
(أ) ٢سم (ب) ٣سم (ج) ٦سم (د) ١٢سم

(١٢) يمكن تعيين دائرة بمعلومية ....
(أ) ثلاث نقط على استقامة واحدة (ب) نقطتين (ج) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة (د) نقطة واحدة

(١٣) إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فان مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ....
(أ) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (ج) منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (د) خارج △

(١٤) △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب بحيث أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم فان نصف قطر الدائرة المارة برؤوسة = ... سم
(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٦ (د) ٨



[٤] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم أب حيث أ ب = ٤سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم ، أب وتر فيها (لا تمح الأقواس)

[٥] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم أب حيث أ ب = ٥سم . ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها = ٤سم

[٦] أب قطعة مستقيمة طولها ٧سم ، ارسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب و طول نصف قطرها أصغر ما يمكن .

[٧] ل مستقيم فى المستوى ، أ ∈ ل . بين كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل .
ارسم ل١ ، ل٢ مستقيمان متوازيان البعد بينهما ٥سم . ثم ارسم دائرة مركزها يقع على ل١ وتمس ل٢ .

[٨] ل مستقيم فى المستوى . أ ∉ ل ، والبعد بينهما ٣سم . بين كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل ويكون : (١) طول نصف قطرها ٤سم (٢) طول قطرها ٦سم
(٣) طول قطرها ٤سم (٤) طول قطرها ٣سم

[٩] ل مستقيم فى المستوى ، أ نقطة تقع على المستقيم ل . بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ١,٥سم بحيث تمر بالنقطة أ ، ويقع مركزها على المستقيم ل . وكم عدد الحلول فى هذه الحالة ؟

[١٠] ارسم أب طولها ٥سم ، كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة أ ومركزها النقطة ب . وكذلك كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة ب ويكون مركزها أ . مع توضيح ذلك بالرسم فى شكل واحد . اذا رسم المستقيم أب فقطع الدائرتين فى س،ص. فأوجد طول س ص

[١١] أب قطعة مستقيمة طولها ٦سم ، ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٤سم ، كم دائرة يمكن رسمها ؟

[١٢] باستخدام أدواتك الهندسية ارسم أب طولها ٤سم ثم ارسم على شكل واحد
دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٥سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟
دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٢سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟
دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٣سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

[١٣] ارسم △ أ ب جـ المتساوى الأضلاع و الذى طول ضلعه ٥سم ثم ارسم الدائرة الخارجة له .
ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ

[١٤] ارسم △ أ ب جـ المتساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٥سم ، ب جـ = ٦سم ثم ارسم الدائرة الخارجة له .
ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ

[١٥] ارسم △ أ ب جـ فيه ب جـ = ٨سم ، أ ب =٦سم ، أ جـ = ١٠سم ، ثم ارسم الدائرة الخارجة له .
ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ



[١٦] ارسم △ ؍ ب جـ فيه ب جـ = ٥سم ، ؍ ب =٧سم ، (∠ ؍ ب جـ)= ١٣٠ ° ، ثم ارسم الدائرة الخارجة له . ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ ؍ ب جـ

[١٧] ارسم △ ؍ ب جـ فيه ؍ ب = ٦سم ، ق(؍) = ٤٠ ° ، طول نصف قطر الدائرة المارة رؤوسه = ٥سم ، إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{؍ ب}}$ ، فاحسب طول $\overline{\text{م ء}}$ حيث م مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث

[٢١] ارسم △ ؍ ب جـ فيه ؍ ب = ٤سم ، ق(∠ ب ؍ جـ) = ٥٨ ° ، داخل دائرة طول نصف قطرها= ٢,٥سم ، ثم أوجد بالبرهان بعد مركزها عن $\overline{\text{؍ ب}}$

[٢٢] ارسم ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى من الخارج أطوال أنصاف أقطارها : ٢سم ، ٣سم ، ٤سم

[٢٦] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم △ ؍ ب جـ القائم الزاوية فى ب بحيث ؍ ب = ٣سم ، ب جـ = ٤سم . ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ومن الرسم أوجد طول نصف قطر الدائرة

[٢٧] ارسم △ ؍ ب جـ فيه ؍ ب = ٦سم ، ؍ جـ = ٤سم ، ق(∠ ؍) =٧٠ ° ثم انشئ دائرة تمر برؤوس △ ؍ ب جـ . وأوجد بالقياس طول نصف قطرها .

[٢٨] ارسم △ ؍ ب جـ فيه ؍ ب = ؍ جـ = ٣سم ، ق(∠ جـ) = ٦٠ ° ثم ارسم دائرة تمر برؤوس △ ؍ ب جـ وأوجد بالقياس طول نصف قطر هذه الدائرة .

[٢٩] ارسم △ س ص ع فيه س ص = ٦سم ، س ع = ص ع = ٥سمثم ارسم دائرة تمر برؤوس △ س ص ع وأوجد طول محيط هذه الدائرة

[٣٠] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم △ ؍ ب جـ فيه ؍ ب = ٥سم ، ب جـ = ٦سم ، ؍ جـ = ٧سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤسه وأوجد مساحة سطح تلك الدائرة

[٣١] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم △ ؍ ب جـ فيه ؍ ب = ٥سم ، ب جـ = ٤سم ، ؍ جـ = ٣سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤسه وأوجد مساحة سطح تلك الدائرة .ثم ارسم الدائرة التى مركزها ؍ وتمس المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، دائرة مركزها ب وتمس المستقيم $\overleftrightarrow{\text{؍ جـ}}$ ، ودائرة مركزها جـ وتمس المستقيم $\overleftrightarrow{\text{؍ ب}}$

[٣٣] ارسم △ ؍ ب جـ المتساوى الأضلاع بحيث طول ضلعه ٥سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوسه وأوجد بالقياس طول نصف قطر الدائرة وماذا تلاحظ ؟

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



تمارين على نظرية الأوتار المتساوية

[١] اكمل ما يأتى :

(١) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة تكون على أبعاد .... من مركزها

(٢) الأوتار المتطابقة فى الدوائر المتطابقة تكون على أبعاد .... من ....

(٣) منتصفات أضلاع الخماسي المنتظم المرسوم داخل دائرة تكون على .... من مركزها

(٤) أب ، جـ ء وتران فى الدائرة م فإذا كان بعد كل منهما عن المركز = $\frac{1}{2}$ نق وكان جـ ء = ٧سم فان أ ب = ... سم

(٥) أب ، أجـ وتران فى دائرة م ، ق(∠أ ب جـ) = ٦٠° ، س منتصف أب ، م ص ⊥ أجـ
فإذا كان م س = م ص ، ب جـ = ١٠سم فان أ ص = ... سم ، محيط △ أ ب جـ = ... سم

(٦) الشكل الرباعى المرسوم داخل دائرة والذي أضلاعه على إبعاد متساوية من مركز الدائرة المارة برؤوسه يسمى ....

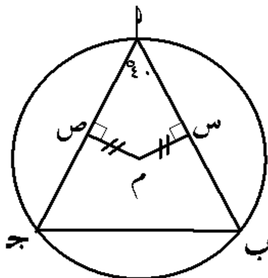
(٧) أب ، أجـ وتران متعامدان فى دائرة مركزها م . فإذا كان هـ منصف أب ، و منتصف أجـ وكان أب > أجـ
فان م هـ .... م و

(٨) فى الدائرة الواحدة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون ....

(٩) المربع المرسوم داخل دائرة تكون أضلاعه على أبعاد .... من مركز الدائرة

(١٠) فى الشكل المقابل

م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ
، م س = م ص ، ق(∠أ) = ٤٠°
فيكون ق(∠ب) = ...°

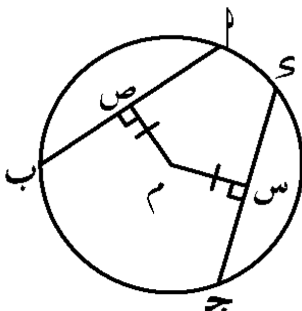


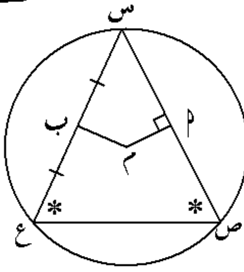
(١١) فى الشكل المقابل

△أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ، م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ
م س = م ص ، ق(∠ب) = ٦٥°
فان ق(∠أ) = ...
إذا كان أب = ٨سم فان أ ص = ...سم

(١٢) فى الشكل المقابل

أب ، أجـ وتران فى دائرة م
، س ، ص منتصفا أب ، أجـ على الترتيب
وكان : م س = م ص ، أ ب = ٧سم
فان : جـ ص = ...سم



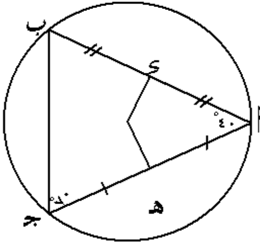


[٢] فى الشكل المقابل

△ س ص ع مرسوم داخل دائرة م فيه ق(∠ ص) = ق(∠ ع)

، م منتصف $\overline{س ص}$ ، م ب ⊥ $\overline{س ع}$

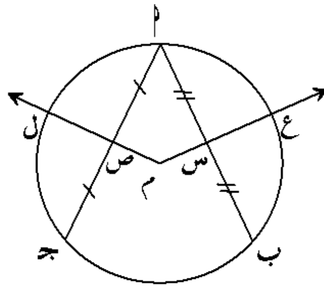
أثبت أن م أ = م ب



[٣] فى الشكل المقابل

ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

احسب ق (∠ ء م هـ) برهن أن : م ء = م هـ .

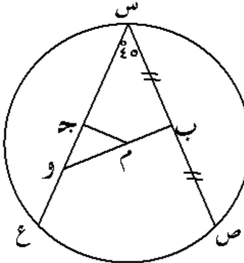


[٤] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ $\overline{أ جـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،

حيث س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب .

رسم $\overrightarrow{م س}$ ، $\overrightarrow{م ص}$ يقطعان الدائرة فى ع ، ل على الترتيب أثبت أن س ع = ص ل

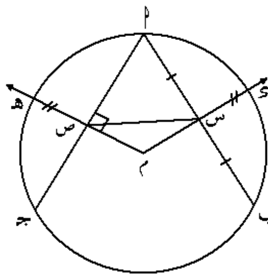


[٥] فى الشكل المقابل

$\overline{س ص}$، $\overline{س ع}$ وتران متساويان فى دائرة م ، ب ، جـ منتصفا $\overline{س ص}$ ، $\overline{س ع}$ على الترتيب .

ق(∠ س) = ٤٥° ، ء ∈ $\overrightarrow{ب م}$ ، $\overrightarrow{ب م}$ ∩ $\overline{س ع}$ = { ء }

احسب ق(∠ ب م جـ) ، ق(∠ ء م جـ) ، أثبت أن ب م = جـ ء

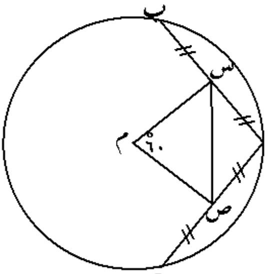


[٦] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م، س منتصف $\overline{أ ب}$

، $\overrightarrow{م س}$ يقطع الدائرة فى ء ، $\overrightarrow{م ص}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ يقطعه فى ص ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : ① س ء = ص هـ ② ق(∠ ص س ب) = ق(∠ س ص جـ)



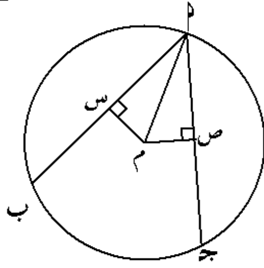
[٧] فى الشكل المقابل

أب = أ جـ ، ق(∠م) = ٦٠°

، س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ جـ}$.

أثبت أن : △ م س ع متساوى الأضلاع

[٨] فى الشكل المقابل

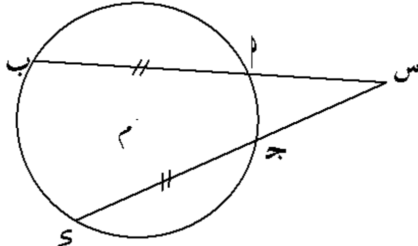


$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م

، م س ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

اثبت أن : ق(∠ س أ م) = ق(∠ ص أ م)

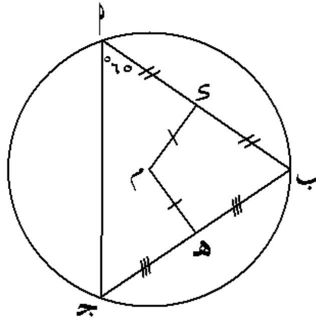
[٩] فى الشكل المقابل



$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م وغير متقاطعان

، فاذا كان $\overleftrightarrow{بأ}$ ∩ $\overleftrightarrow{ءجـ}$ = { س } اثبت أن : س أ = س جـ

[١٠] فى الشكل المقابل

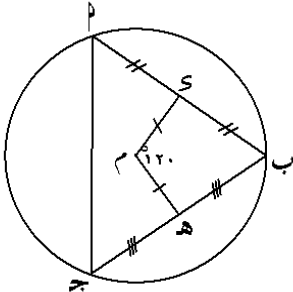


△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠أ) = ٦٥°

، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب

م ء = م هـ اثبت أن : ق(∠ ب)

[١١] فى الشكل المقابل

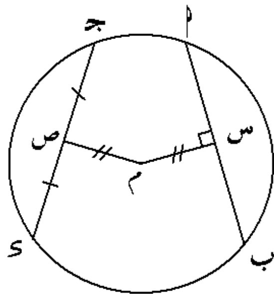


△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠م) = ١٢٠°

، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب

م ء = م هـ اثبت أن : △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

[١٢] فى الشكل المقابل

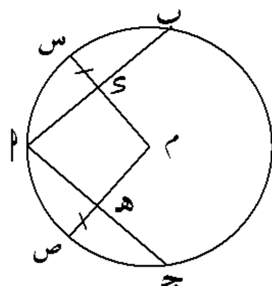


م دائرة ، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$

، م س = م ص ، أ ب = ٧سم

احسب طول $\overline{ء ص}$

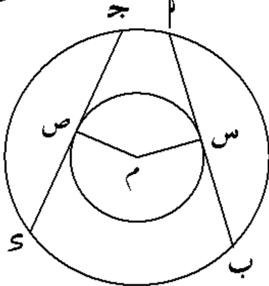
[١٣] فى الشكل المقابل



$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران فى دائرة م ، حيث ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، على الترتيب

، $\overrightarrow{م هـ}$ ، $\overrightarrow{م ء}$ يقطعان الدائرة فى ص ، س على الترتيب بحيث ء س = هـ ص ،

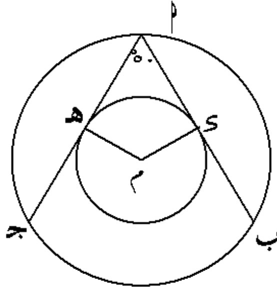
اثبت أن أ ب = أ جـ



[١٤] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{ا ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب .

أثبت أن : ا ب = جـ ء

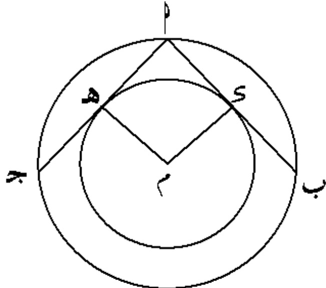


[١٥] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ مماستان للدائرة الصغرى

، ق(∠ب) = ٥٠°

أثبت أن ① ا ب = ا جـ ② ق(∠ ء م هـ)

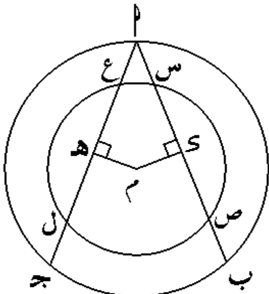


[١٦] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ،

$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ وتران فى الدائرة الكبرى و يمسان الدائرة الصغرى ف ء ، هـ

أثبت أن ا ء = ا هـ



[١٧] فى الشكل المقابل

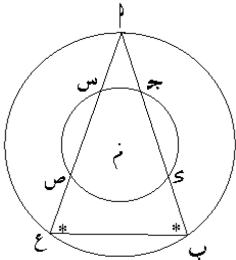
دائرتان متحدتا المركز م ، ا ب = ا جـ

، $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ا ب}$

، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{ا جـ}$

أثبت أن س ص = ع ل

[١٨] فى الشكل المقابل



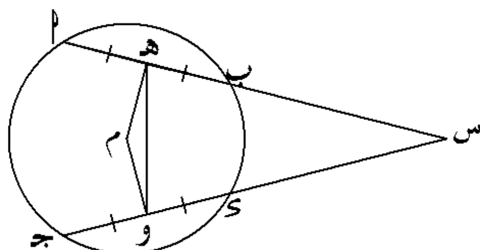
دائرتان متحدتى المركز م، $\overline{ا ب}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء على الترتيب

$\overline{ا ع}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب

فاذا كان : ق(∠ا ب ع) = ق (∠ ا ع ب)

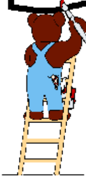
أثبت أن : جـ ء = س ص

[١٩] فى الشكل المقابل

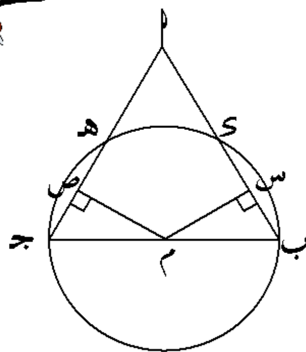


م دائرة ، ا ب = ا جـ ، هـ ، و منتصفا $\overline{ا ب}$ ، $\overline{جـ ء}$.

أثبت أن : △ س هـ و متساوي الساقين



[٢٠] فى الشكل المقابل

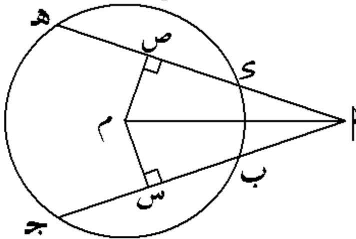


△ أ ب جـ فيه $\overline{ب جـ}$ قطر فى دائرة م

، رسم $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

أثبت أن أ ب = أ جـ

[٢١] فى الشكل المقابل



ب جـ = ى هـ ، $\overleftarrow{جـ ب} \cap \overleftarrow{هـ ى} = \{ أ \}$

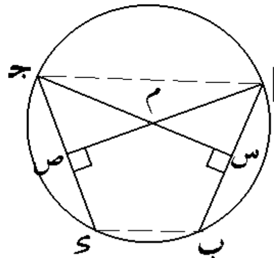
أثبت أن : ① $\overleftrightarrow{أ م}$ ينصف (∠ هـ أ جـ) ② أ ب = أ ى

[٢٢] دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب وطولا نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$

حيث نق$_1$ > نق$_2$ رسم $\overleftrightarrow{أ جـ}$ // $\overline{م ن}$. ويقطع الدائرة م فى جـ ، الدائرة ن فى ى

أثبت أن : أ جـ > أ ى .

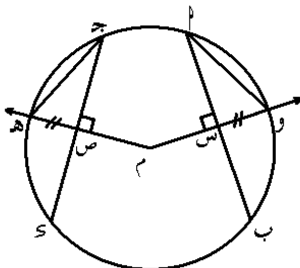
[٢٣] فى الشكل المقابل



م دائرة ، أ ب = جـ ى ، س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ى}$

أثبت أن : ① ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ى ص س) ② $\overline{أ جـ}$ // $\overline{ب ى}$

[٢٤] فى الشكل المقابل

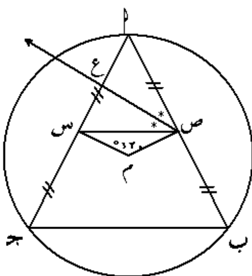


$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ى}$ وتران فى دائرة م ، $\overleftarrow{م س} \perp \overline{أ ب}$ ويقطع الدائرة فى و

، $\overleftarrow{م ص} \perp \overline{جـ ى}$ ويقطع الدائرة فى هـ ، وس = هـ ص

أثبت أن : ① أ ب = جـ ى ② أ و = جـ هـ

[٢٥] فى الشكل المقابل



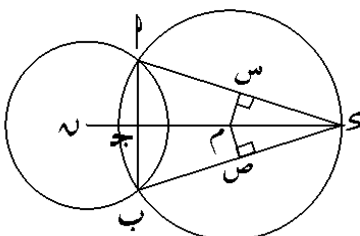
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،

س ، ص منتصفا هما على الترتيب، ق (∠ س م ص) = ١٢٠°

، $\overleftarrow{ص ع}$ ينصف (∠ أ ص س)

أثبت أن : $\overleftarrow{ص ع}$ // $\overline{م س}$

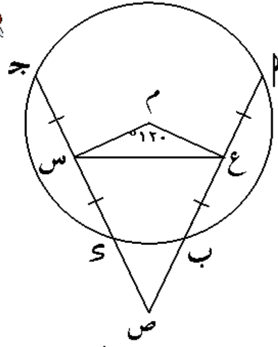
[٢٦] فى الشكل المقابل



الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{م ن} = \{ جـ \}$

ى ∈ المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ ، م س ⊥ $\overline{أ ى}$ ، م ص ⊥ $\overline{ب ى}$

أثبت أن : م س = م ص

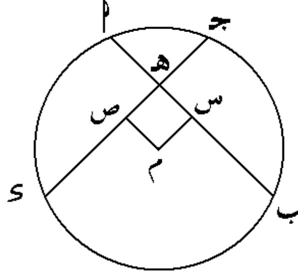


[٢٧] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ ء} = \{ص\}$ ، ع منتصف $\overline{أب}$ ، س منتصف $\overline{جـ ء}$

، ق(∠ع م س) = ١٢٠° أثبت أن : △ ع ص س متساوى الأضلاع .

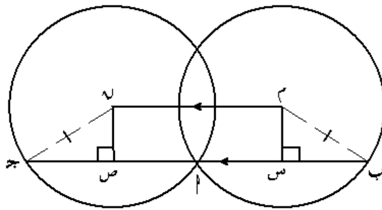


[٢٨] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، $\overline{أب} \cap \overline{جـ ء} = \{ هـ \}$

، النقطة س منتصف $\overline{أب}$ ، النقطة ص منتصف $\overline{جـ ء}$

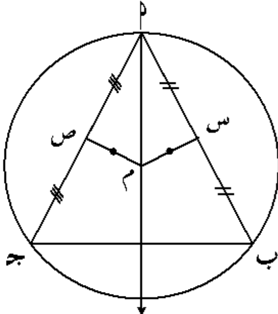
أثبت أن : ① △ هـ ب ء متساوى الساقين ② $\overline{س ص} // \overline{ب ء}$



[٢٩] فى الشكل المقابل

المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ // المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$

، م ب = ن جـ أثبت أن : أ ب = أ جـ

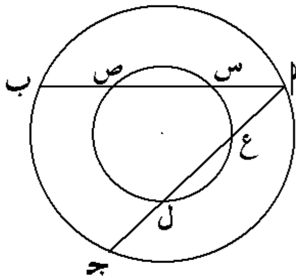


[٣٠] فى الشكل المقابل:

△أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ب أ جـ) = ٦٠°

، س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أجـ}$ ، م س = م ص

أثبت أن : ① △ أ ب جـ متساوى الأضلاع . ② $\overrightarrow{أم} \perp \overline{ب جـ}$

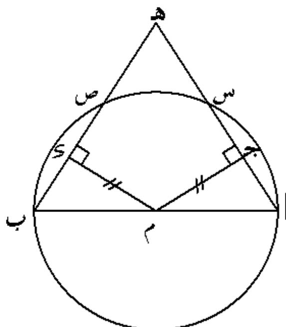


[٣١] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتى المركز م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى

ويقطعان الدائرة الصغرى الأول فى س ، ص ، الثانى فى ع ، ل

أثبت أن أ س = أ ع



[٣٢] فى الشكل المقابل

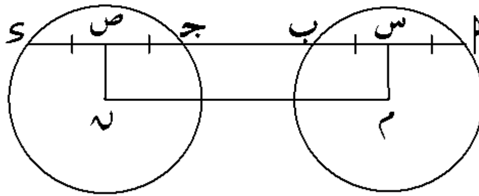
$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، $\overline{م جـ} \perp \overline{أ س}$ ، $\overline{م ء} \perp \overline{ب ص}$

، م جـ = م ء ، $\overleftarrow{م س} \cap \overleftarrow{ب ص} = \{ هـ \}$

أثبت أن : ① △ هـ أ ب متساوى الساقين .

② $\overline{س ص} // \overline{أ ب}$

[٣٣] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متطابقتان ، أ ب = جـ ء

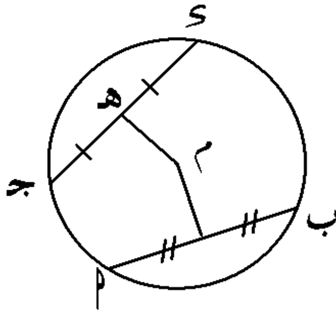
، س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب

أثبت أن : م س = ن ص

[٣٤] م ، ن دائرتان متطابقتان متقاطعتان فى س ، ص ، م هـ ⊥ أ ب ، ن و ⊥ جـ ء ، أ ب = س ص

، أ ب = جـ ء . أثبت أن : ① م هـ = م ل ② ن و = ن ل

[٣٥] فى الشكل المقابل



أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م حيث و ، هـ منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب

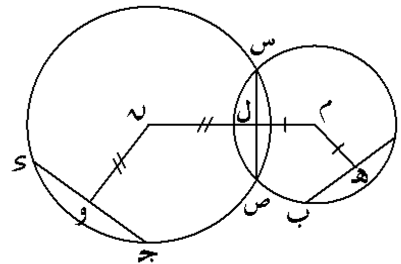
فاذا كانت أ(٠ ، -٣) ، ب(٤ ، -١) ، هـ(-١ ، ١) ، م(١ ، ٠)

أثبت أن : أ ب = جـ ء

[٣٦] إذا كان : أ ب ، أ جـ وترين متساويين فى الطول فى الدائرة م وكان م(٢ ، ١) ، أ(٤ ، ٣) ، ب(٠ ، ٣)

أوجد : بعد الوتر أ جـ عن مركز الدائرة م .

[٣٧] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى س ، ص ، م هـ ⊥ أ ب ، ن و ⊥ جـ ء

، م هـ = م ل ، ن و = ن ل أثبت أن أ ب = جـ ء

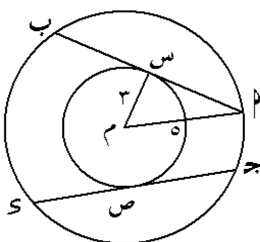
[٣٨] فى الشكل المقابل:

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا

أ ب ، جـ ء على الترتيب . سم المستقيم س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و

، سم م ل ⊥ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ أثبت أن : س هـ = ص و

[٣٩] فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة الكبرى

ويمسان الدائرة الصغرى ف س ، ص على الترتيب. أثبت أن أ ب = أ جـ.

وإذا كان طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم

وطول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٣سم . أوجد طول أ ب .



[٤٠] فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة مركزها م س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

، ق(∠ س ص ء) = ق(∠ ص س ب)

اثبت أن : أ ب = جـ ء

[٤١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان ، أ ء // م ن

، أ ء يقطع الدائرة م فى أ ، ب ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء

اثبت أن : أ ب = جـ ء

[٤٢] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ ، ب ء وتران متوازيان

اثبت أن : ① أ جـ = ب ء　　② جـ ء قطر فى الدائرة م

[٤٣] فى الشكل المقابل

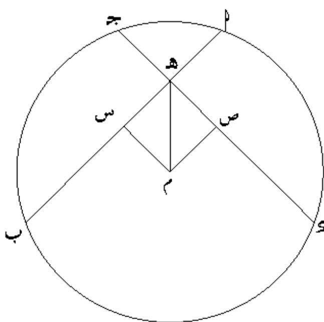
△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م وكانت س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه

، م س = م ص

اثبت أن م ص ينصف الزاوية المنعكسة ∠ (س م ع)

[٤٤] أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ، رسم م ء فقطع الدائرة فى س ، رسم م هـ فقطع الدائرة فى ص اثبت أن : ① ء س = هـ ص　　② أ س = أ ص

[٤٥] فى الشكل المقابل

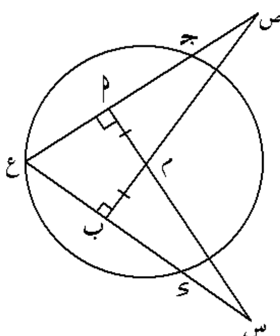


أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م يتقاطعان فى نقطة هـ ، م س ⊥ أ ب

، م ص ⊥ جـ ء ، ق(∠ أ هـ م) = ق(∠ ء هـ م)

اثبت أن : أ ب = جـ ء

[٤٦] فى الشكل المقابل:

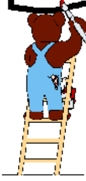


ع جـ ، ع ء وتران فى الدائرة م ، وكان أ ∈ ع جـ بحيث أ م ⊥ ع جـ

، أ م ∩ ع ء = { س } ، ب ∈ ع ء بحيث ب م ⊥ ع ء

، ب م ∩ ع جـ = { ص } فاذا كان : م أ = م ب

اثبت أن : جـ ص = ء س

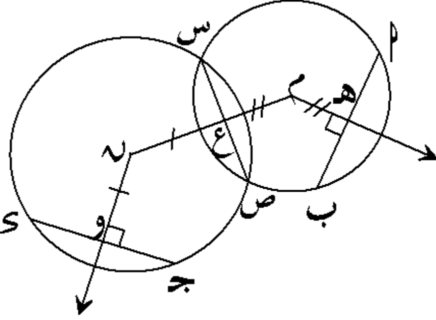


[٤٧] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى س ، ص ، وكانت م هـ = م ع

، ن و = ن ع ، م هـ ⊥ أ ب ، ن و ⊥ جـ ء .

اثبت أن أ ب = جـ ء

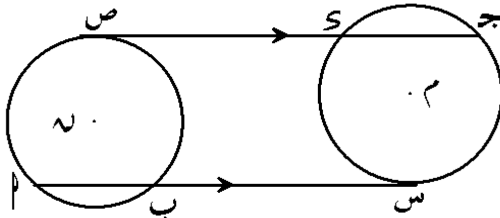


[٤٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، أ ب يمس الدائرة م عند س

، جـ ء يمس الدائرة ن عند ص ، المستقيم أ ب // المستقيم جـ ء .

اثبت أن ① أ ب = جـ ء ، ② أ س = جـ ص



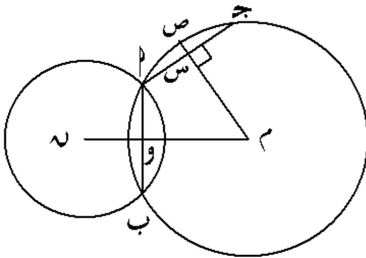
[٤٩] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب رسم م س ⊥ أ جـ

ويقطع أ جـ فى س ويقطع الدائرة م فى ص

ورسم م ن ويقطع أ ب فى و الدائرة م فى هـ فإذا كان س ص = و هـ .

اثبت أن أ جـ = أ ب

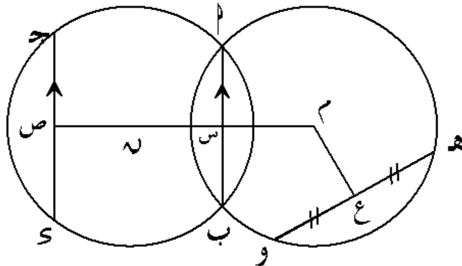


[٥٠] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب ، م ن ∩ أ ب = { س }

جـ ء // أ ب ، م ن ∩ جـ ء = { ص } ، ع منتصف هـ و ، هـ و = جـ ء

اثبت أن : ① م ع = ن ص ، ② س ص > س ع

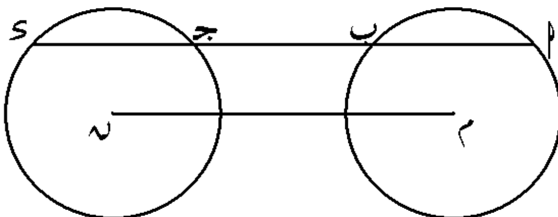


[٥١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ،

أ ء يقطع الدائرة م فى أ ، ب ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء

، أ ب = جـ ء اثبت أن أ ء // م ن

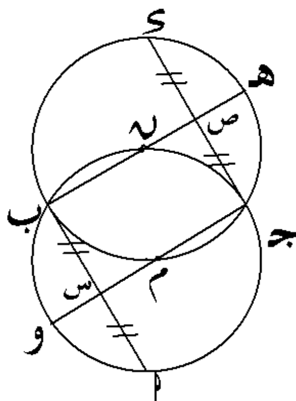


[٥٢] فى الشكل المقابل

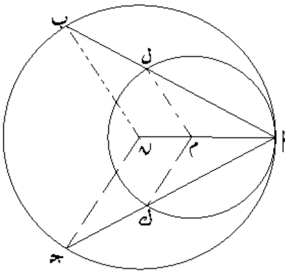
م ، ن دائرتان متطابقتان ، أ ب = جـ ء ، أ س = س ب ، جـ ص = ص ء

اثبت أن : ① ن ص ⊥ جـ ء

② م س ⊥ أ ب		③ هـ ص = س و

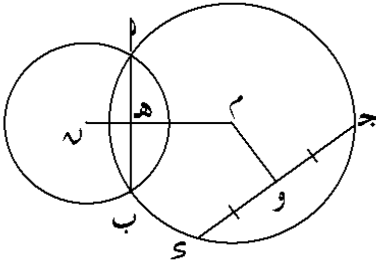


[٥٣] فى الشكل المقابل



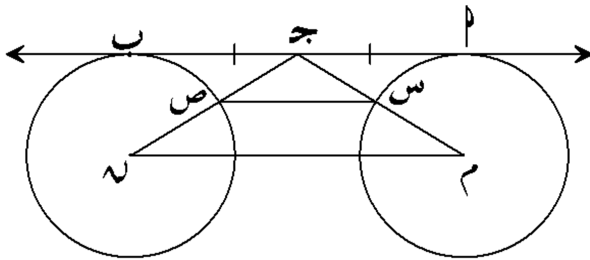
دائرتان م ، ن متماسان من الداخل فى أ ،
رسم أب ، أجـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى ن
فقطعا الدائرة الصغرى م فى ل ، ك على الترتيب
أثبت أن : أ ل = أ ك

[٥٤] فى الشكل المقابل



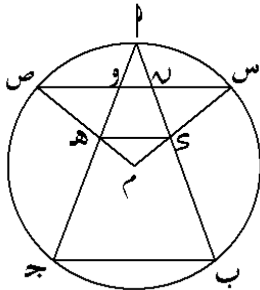
م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{مـن} \cap \overline{أب}$ = { هـ }
، $\overline{جـء}$ وتر فى الدائرة م ، و منتصف $\overline{جـء}$ ، أب = جـء .
أثبت أن م هـ = م و

[٥٥] فى الشكل المقابل



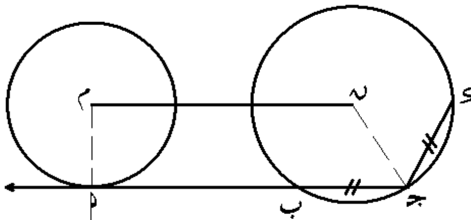
م ، ن دائرتان متطابقتان ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك لهما
، جـ منتصف $\overline{أب}$ ، الدائرة م $\cap \overline{مـجـ}$ = { س }،
الدائرة ن $\cap \overline{نجـ}$ = { ص }
أثبت أن : ① $\overline{أب}$ // $\overline{مـن}$
② △ جـ م ن متساوى الساقين ③ $\overline{سص}$ // $\overline{مـن}$

[٥٦] فى الشكل المقابل



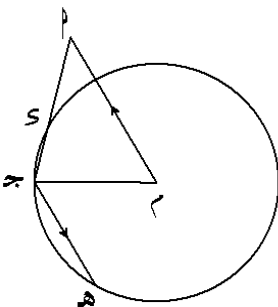
$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، ء منتصف $\overline{أب}$
، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overrightarrow{مء}$ ، $\overrightarrow{مـهـ}$ يقطعان الدائرة م فى س ، ص على الترتيب .
$\overline{سص}$ تقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ فى ن ، و . أثبت أن : س ء = ص هـ

[٥٧] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٥سم ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمس الدائرة م عند أ
ويقطع الدائرة ن فى ب ، جـ على الترتيب حيث ب جـ = ٦سم ، م ن = ١٢سم
أثبت أن : الشكل م أ جـ ن شبه منحرف ثم احسب مساحته
إذا كانت : جـ ء = جـ ب أوجد بعد النقطة ن عن $\overline{جـء}$

[٥٨] فى الشكل المقابل



△ أ ب جـ فيه : أ م = أ جـ ، ورسمت دائرة مركزها م ، و نصف قطرها $\overline{مـجـ}$
فقطعت $\overline{أجـ}$ فى نقطة ء ، ورسم $\overrightarrow{جـهـ}$ // $\overline{أم}$ فقطع الدائرة فى هـ
أثبت أن : جـ هـ = جـ ء



الوحدة الخامسة

١ الزوايا والأقواس

٢ العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المرسومة على نفس القوس

٣ التمارين المشهورة

٤ العلاقة بين الزاويا المحيطية المرسومة على نفس القوس





تمارين [١] على الزوايا والأقواس

✍ [١] اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة :

(١) قياس القوس الذى يمثل ربع دائرة = ... °

(٢) طول القوس الذى يمثل ثلث محيط دائرة = ...

(٣) Δ ٲ ب جـ متساوى الأضلاع تمر برؤوسه دائرة م فان ق (ٲ ب) = ... °

(٤) طول القوس الذى يمثل $\frac{٣}{٥}$ دائرة = ...

(٥) الزاوية التى يقع رأسها على الدائرة وكل من ضلعيها وترين فى الدائرة تسمى زاوية ....

(٦) الزاوية المركزية التى قياسها ١٥٠ ° تقابل قوسا طوله = ... محيط دائرة

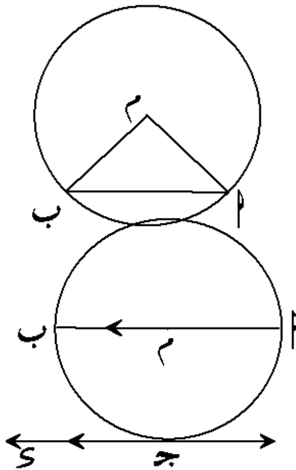
(٧) إذا تساوى قياسا قوسين فى دائرة فان وتريهما ....

(٨) الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران بينهما ....

(٩) الزاوية المركزية التى قياسها ١٠٠ ° تقابل قوسا قياسه .... °

(١٠) دائرة مركزها م ، ق (ٲ ب) = ٦٠ ° ،

ٲ ب = ٧سم فان محيط الدائرة المقابلة .... سم



(١١) فى الشكل المقابل :

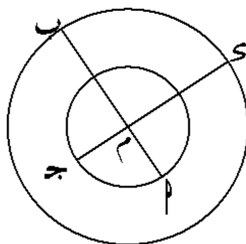
ٲ ب قطر ، جـ ء مماس ، ٲ ب // جـ ء

ق (ٲ جـ) = ... °

(١٢) فى الشكل المقابل :

ق (ٲ جـ) = ٥٠ °

فان : ق (ب ء) = ... °



(١٣) ٲ ب جـ ء مربع مرسوم داخل دائرة م فان : ق (ٲ ب) = ... °

(٢) اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة :

(١) قياس القوس الذى يمثل $\frac{٣}{٤}$ قياس دائرة ....°

(٢) قياس نصف الدائرة = ...° بينما طول نصف الدائرة = ...

(٣) إذا توازى وتران فى الدائرة فإنهما يحصران بينهما .... فى القياس

(٤) إذا مرت دائرة برؤوس الشكل السداسى المنتظم أ ب جـ ء هـ و فان ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ...°

(٥) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه الدائرة...........

(٦) إذا كان $\overline{س ص}$ // $\overline{ع ل}$ وتران متوازيان فى دائرة فان ق ($\overset{\frown}{س ع}$) = ق ($\overset{\frown}{.........}$)

(٧) إذا كان $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م فان : $\overset{\frown}{أ ب}$ يمثل .... الدائرة

(٨) قياس الدائرة = ...° (٩) الزاوية المركزية هى ....

(١٠) قياس القوس هو قياس الزاوية .... بينما طول القوس هو جزء من ....

(١١) إذا رسم المربع أ ب جـ ء داخل دائرة م فان : ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ...°

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا أصغر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٢) قياس القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة ....°

❶ ١٢٠ ❷ ١٤٤ ❸ ١٥٦ ❹ ٢٠٧

(٣) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا أكبر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٤) طول $\frac{١}{٤}$ الدائرة التى طول نصف قطرها = ١٤سم (حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) = ... سم

❶ ٢٢ ❷ ٣٢ ❸ ٤٤ ❹ ٨٨

(٥) الزاوية المركزية التى تقابل قوسا أكبر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة



(٦) طول نصف الدائرة التى طول نصف قطرها نق = ...

❶ ٩٠° ❷ π نق ❸ ١٨٠° ❹ ٢π نق

(٧) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا = نصف دائرة فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٨) الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط الدائرة

❶ $\frac{١}{٤}$ ❷ $\frac{١}{٦}$ ❸ $\frac{١}{٣}$ ❹ $\frac{١}{٢}$

(٩) قياس $\frac{١}{٦}$ دائرة = ...°

❶ ٦٠ ❷ ١٢٠ ❸ ٣٠ ❹ ٣٦٠

(١٠) $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة التى طول نصف قطرها نق = ...

❶ ٤٥° ❷ ٩٠° ❸ π نق ❹ $\frac{\pi \text{ نق}}{٢}$

(١١) قياس القوس الذى يمثل ربع قياس الدائرة = ...

❶ ١٨٠° ❷ ٩٠° ❸ π نق ❹ $\frac{\pi \text{ نق}}{٢}$

(١٢) قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة = ...

❶ ٦٠° ❷ ١٢٠ ❸ π نق ❹ $\frac{٢}{٣}$ π نق

(١٣) طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ...

❶ ٢π نق ❷ π نق ❸ $\frac{١}{٢}$ π نق ❹ ١٨٠°

(١٤) ٲ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{ٲ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ فان ....

❶ ٲ ب < ء جـ ❷ ٲ ب > ء جـ ❸ ٲ ب = ء جـ ❹ $\overline{ٲ ب}$ // $\overline{ب جـ}$

(١٥) الزاوية المركزية التى قياسها ٦٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط الدائرة

❶ $\frac{١}{٢}$ ❷ $\frac{١}{٣}$ ❸ $\frac{١}{٤}$ ❹ $\frac{١}{٦}$



(١٦) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° لدائرة طول نصف قطرها ٢,١سم هو ....

❶ ٤,٤سم ❷ ٦٠° ❸ ٦,٦سم ❹ ٤,٢سم

(١٧) إذا كان قياس زاوية مركزية قياسها ١٣٥° في دائرة طول نصف قطرها ٤سم فان طول قوسها = ... سم

❶ ٦π ❷ ٣π ❸ $\frac{١٦}{٣}\pi$ ❹ ٢٧٠°

(١٨) دائرة محيطها ٣٦سم فان قياس القوس منها طوله ٦سم يكون ....

❶ ٦٠° ❷ ٣٠° ❸ ٩٠° ❹ ١٢٠°

(١٩) قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}\pi$ نق فانه يقابل زاوية مركزية قياسها ....

❶ ٣٠° ❷ ٦٠° ❸ ١٢٠° ❹ ٢٤٠°

(٢٠) الزاوية التى قياسها ٩٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط الدائرة

❶ ٤ ❷ $\frac{١}{٢}$ ❸ $\frac{١}{٣}$ ❹ $\frac{١}{٤}$

(٢١) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° في دائرة طول نصف قطرها نق = ...

❶ $\frac{١}{٣}\pi$ نق ❷ $\frac{٢}{٣}\pi$ نق ❸ ٣ π نق ❹ π نق

(٢٢) طول القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة = ...سم

❶ ٢π نق ❷ π نق ❸ $\frac{١}{٢}\pi$ نق ❹ $\frac{١}{٤}\pi$ نق

(٢٣) قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة = ...

❶ ٦٠° ❷ ٧٢° ❸ ١٢٠° ❹ ١٣٥°

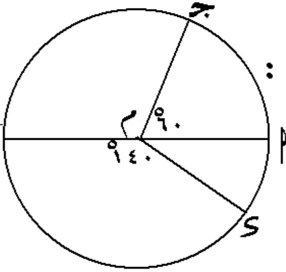
(٢٤) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٣٠° في دائرة محيطها ٣٦سم = ... سم

❶ ١٨ ❷ ٩ ❸ ٣ ❹ ٤,٥

(٢٥) قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}\pi$ نق فانه يقابل زاوية مركزية قياسها ....

❶ ٢٤٠° ❷ ٣٠° ❸ ١٢٠° ❹ ٦٠°





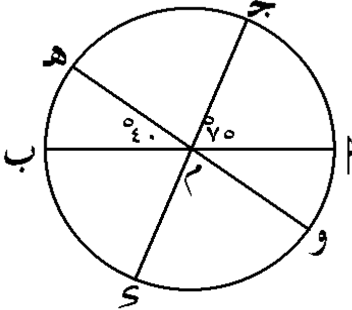
[٤] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(أ م جـ) = ٦٠° ، ق(ب م ء) = ١٤٠° أكمل ما يأتى :

① ق(أ جـ) = ...° ② ق(ب ء) = ...°

③ ق(جـ ء) = ...° ④ ق(جـ ب ء) = ...°

⑤ ق(ء جـ ب) = ...°

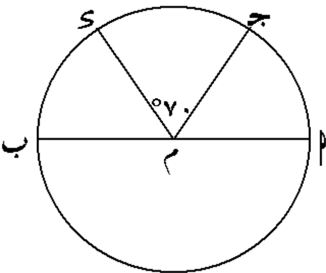


[٥] فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء ، هـ و أقطار فى الدائرة م أكمل :

① ق(أ جـ) = ...° ② ق(أ جـ هـ) = ...°

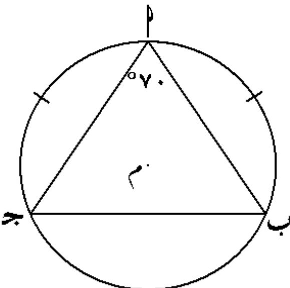
③ ق(أ جـ ء) = ...° ④ ق(أ و هـ) = ...°



[٦] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(جـ م ء) = ٧٠° ،

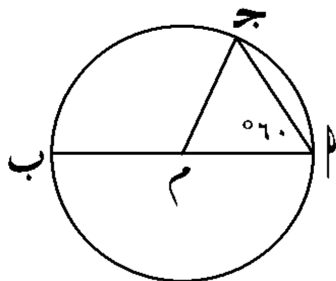
ق(أ جـ) : ق(ء ب) = ٥ : ٦ أوجد : ق(أ جـ ء)



[٧] فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(أ جـ) = ق(ب جـ) ،

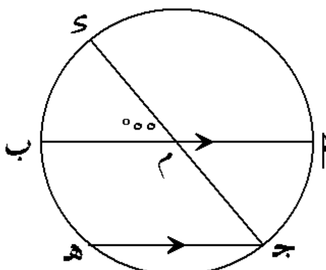
ق(أ جـ ب) = ٧٠° أوجد : ق(أ ب جـ)



[٨] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ ، ق(∠ أ) = ٦٠° ،

احسب ق(أ جـ) ، ق(ب جـ) ، ق(∠ ب أ جـ)



[٩] فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء قطران فى الدائرة م ،

ق(ء م ب) = ٥٥° ، جـ هـ // أ ب

أوجد : ق(ب هـ)

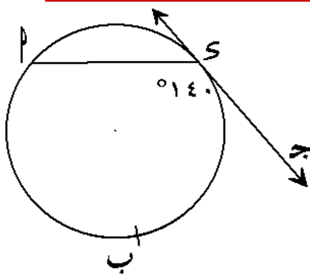


[١٠] فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{جـ ء}$ للدائرة م عند نقطة ء ،

ق(∠ أ ء جـ) = ١٤٠°

أوجد : ق($\overset{\frown}{أ ب ء}$)

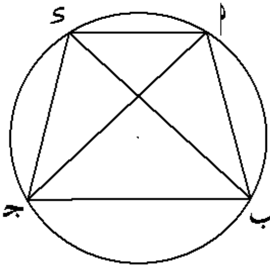


[١١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، أ جـ = ب ء

، أ ب = (٣س – ٥) سم ، ء جـ = (س + ٣) سم

اثبت أن : ❶ أ ب = جـ ء ❷ أوجد طول $\overline{أ ب}$

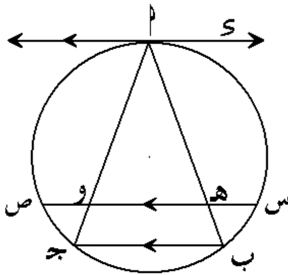


[١٢] فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة عند نقطة أ ،

$\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$

اثبت أن : ب هـ = جـ و

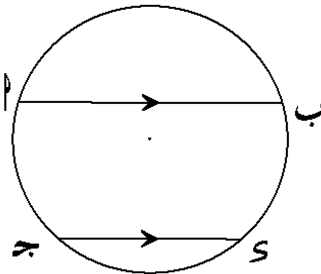


[١٣] فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١٦٠° ، ق($\overset{\frown}{جـ ء}$) = ٨٠°

أوجد بالبرهان : ق($\overset{\frown}{أ جـ}$)

اثبت أن : ب جـ = أ ء

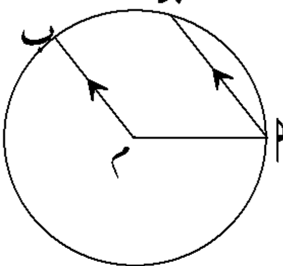


[١٤] فى الشكل المقابل :

دائرة م ، $\overline{أ جـ}$ // $\overline{م ب}$ ،

ق(∠ أ م ب) = ٢ ق(∠ أ)

أوجد : ق($\overset{\frown}{أ جـ ب}$)

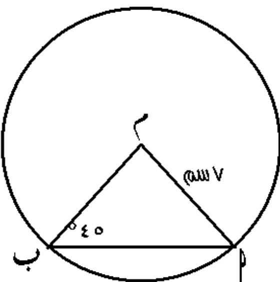


[١٥] فى الشكل المقابل :

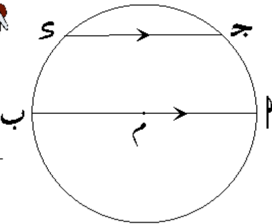
أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م

بحيث ق(∠ م ب أ) = ٤٥° ، أ م = ٧سم

أوجد طول $\overset{\frown}{أ ب}$ ($\pi = \frac{22}{7}$)



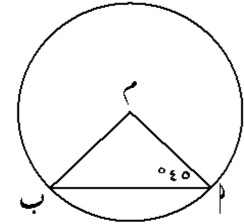




(١٦) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ،

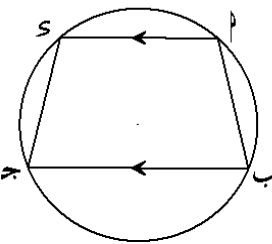
ق($\frown{أ جـ}$) = ٤٠°، $\overline{جـ ء}$ // $\overline{أ ب}$ أوجد : ق($\frown{جـ ء}$)



(١٧) فى الشكل المقابل :

طول نصف قطر الدائرة = ٧سم ، ق(∠ م أ ب) = ٤٥°

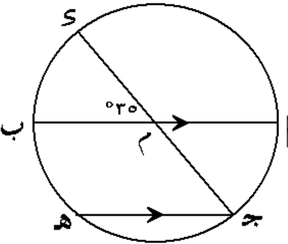
أوجد طول $\frown{أ ب}$



(١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ اثبت أن أ جـ = ب ء

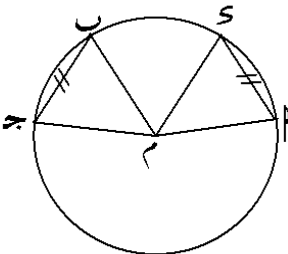


(١٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ قطران فى الدائرة م

بحيث ق(∠ ء م ب) = ٣٥° ، $\overline{جـ هـ}$ // $\overline{أ ب}$

أوجد : ق($\frown{ب هـ}$)

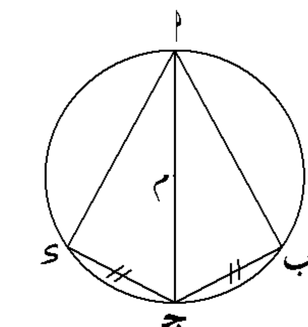


(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م ،

ء ∈ $\frown{أ ب}$ الأصغر ، جـ ∈ $\frown{أ ب}$ الأكبر ، أ ء = ب جـ

اثبت أن : ق(∠ أ م ب) = ق(∠ جـ م ء)

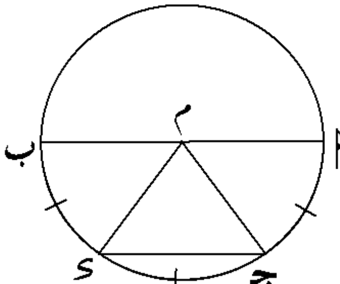


(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم دال دائرة م ،

$\overline{أ جـ}$ قطر فى الدائرة م ، جـ ب = جـ ء

اثبت أن : ق($\frown{أ ب}$) ق($\frown{أ ء}$)



(٢٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة التى مركزها م ،

ق($\frown{أ جـ}$) = ق($\frown{جـ ء}$) = ق($\frown{ء ب}$)

اثبت أن : △ م جـ ء متساوى الأضلاع .

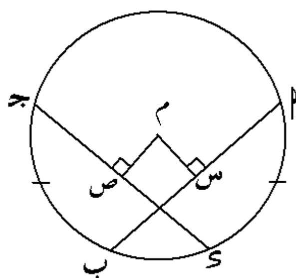


(٢٣) فى الشكل المقابل :

ق ($\overset\frown{أ جـ}$) = ق ($\overset\frown{ب ء}$) ، م س $\perp$ $\overline{أ ب}$ ، م ص $\perp$ $\overline{جـ ء}$

أثبت أن : ❶ طول $\overset\frown{أ ب}$ = طول $\overset\frown{جـ ء}$

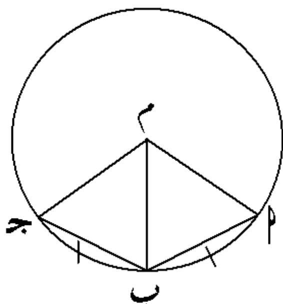
❷ م س = م ص



(٢٤) فى الشكل المقابل :

ق ($\overset\frown{أ ب}$) = ق ($\overset\frown{ب جـ}$)

أثبت أن : محيط △ م أ ب = محيط △ م ب جـ

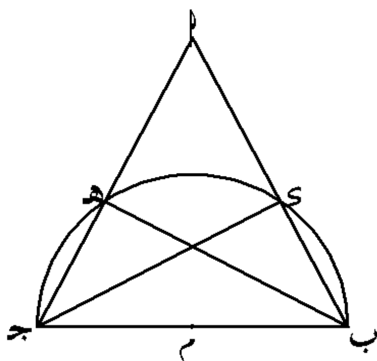


(٢٥) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{ب ء}$ $\cap$ $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ = { أ } ، أ ب = أ جـ ، أ ء = أ هـ

أثبت أن ❶ ق ($\overset\frown{ب ء}$) = ق ($\overset\frown{جـ هـ}$)

❷ ب هـ = جـ ء

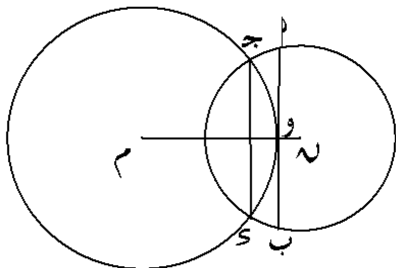


(٢٦) فى الشكل المقابل :

الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { جـ ، ء }

، $\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م عند و

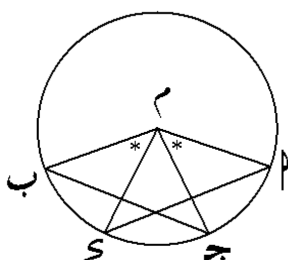
أثبت أن : ق ($\overset\frown{أ جـ}$) = ق ($\overset\frown{ب ء}$)



(٢٧) فى الشكل المقابل :

فى الدائرة م : ق (∠ أ م جـ) = ق (∠ ء م ب)

أثبت أن : أ ء = ب جـ

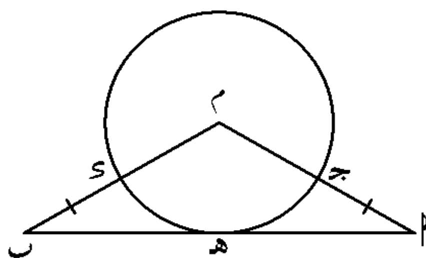


(٢٨) فى الشكل المقابل :

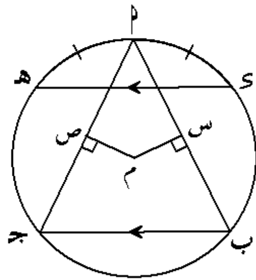
دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ،

$\overline{أ ب}$ قطعة مماسة للدائرة عند هـ ،

أ جـ = ب ء = ٦ سم   أوجد : ق ($\overset\frown{جـ هـ ء}$)







(٢٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{ب جـ} // \overline{ء هـ}$ ، أ منتصف $\overset{\frown}{ء هـ}$ ،

$\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

أثبت أن : ❶ أ ب = أ جـ ❷ م س = م ص

(٣٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ مماس للدائرة م عند جـ

$\overleftrightarrow{ء هـ} // \overline{أ ب}$ ق ($\overset{\frown}{ب ص}$) = ٢ ق ($\overset{\frown}{جـ ص}$) ، س منتصف ($\overset{\frown}{أ جـ}$)

أوجد قياسات زوايا △ م ء هـ

(٣١) فى الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ١٥سم ، $\overline{أ ب} // \overline{جـ ء}$

، ق (∠ أ م جـ) = ٨٠° ، طول ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = طول ($\overset{\frown}{جـ ء}$)

أوجد : ❶ ق (∠ ء جـ م)

❷ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) ❸ طول ($\overset{\frown}{أ ب}$)

(٣٢) فى الشكل المقابل :

دائرة م طول نصف قطرها ٧سم ،

$\overline{أ ب}$ قطر فيها ، $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس لها عند جـ ،

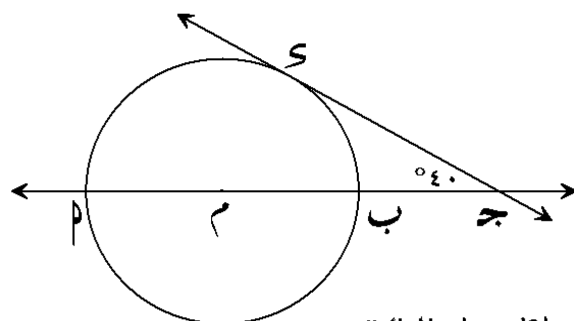
$\overleftrightarrow{س ص} // \overleftrightarrow{أ ب}$ أوجد :

❶ ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) ❷ طول $\overline{أ جـ}$ ❸ مساحة المنطقة المظللة ($\pi = \frac{22}{7}$)

(٣٣) فى الشكل المقابل : 📖

$\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة عند ء :

أوجد : ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) ، ق ($\overset{\frown}{أ ء}$)



(٣٤) م دائرة طول نصف قطرها ٥سم فإذا كان أ ، ب نقطتان على الدائرة م بحيث ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١٠٨° أوجد طول ($\overset{\frown}{أ ب}$) حيث π = ٣,١٤

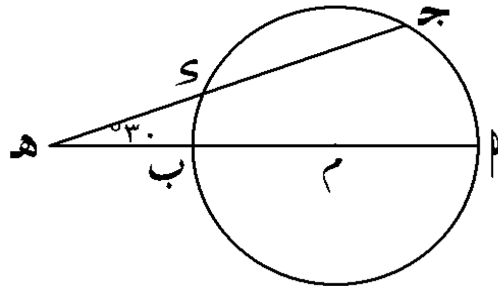


(٣٥) أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ، أ ب = أ ء ، ب جـ = جـ ء

اثبت أن : $\overline{أجـ}$ قطر فى الدائرة م

(٣٦) أ ، ب ، جـ ثلاث نقط على دائرة بحيث ق($\overset{\frown}{أب}$) : ق($\overset{\frown}{بجـ}$) : ق($\overset{\frown}{أجـ}$) كنسبة ١ : ٢ : ٣ فاذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٨سم أوجد : طول ($\overset{\frown}{أبجـ}$)

(٣٧) فى الشكل المقابل :



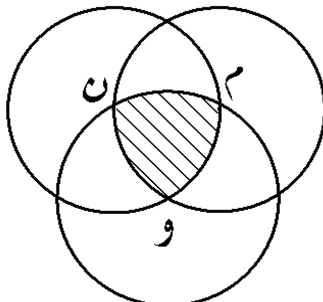
$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـء}$ = { هـ }

ق(∠ أ هـ جـ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٨٠°

أوجد : ($\overset{\frown}{جـء}$)

متفوقين

(٣٨)



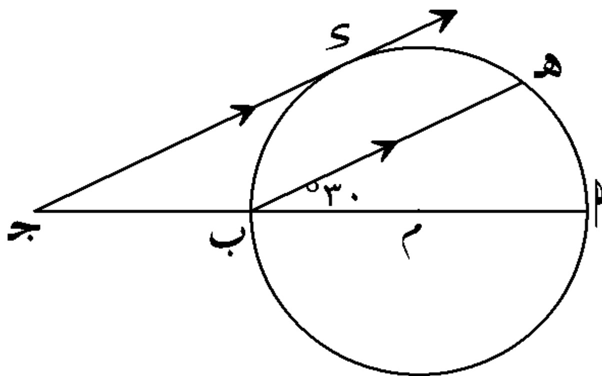
م ، ن ، و ثلاث دوائر متطابقة وكل منها تمر بمركز الأخرى

فإذا كان محيط الجزء المظلل = π سم

أوجد : طول نصف قطر الدائرة م

(٣٩) $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overset{\frown}{ءجـ}$ فى الدائرة بحيث ب منتصف $\overset{\frown}{ءجـ}$ ، هـ نقطة على الدائرة بحيث $\overline{جـهـ}$ // $\overline{أب}$ اثبت أن : م ∈ $\overline{ءهـ}$

(٤٠) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{جـهـ}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{جـهـ}$ // $\overline{بهـ}$

فإذا كان : ق(∠ أ ب هـ) = ٣٠°

أوجد : ق(∠ أ م هـ) ، ق($\overset{\frown}{بء}$)



تمارين [٢] على علاقة الزاوية المحيطية بالمركزية

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٢) الزاوية لمركزية التى تقابل قوسا أكبر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٣) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا أصغر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٤) قياس القوس المقابل لزاوية محيطية مرسومة فى نصف دائرة ....

❶ ٩٠° ❷ ١٨٠° ❸ ٢٧٠° ❹ ٦٠°

(٥) قياس الزاوية المحيطية = ... الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .

❶ ربع قياس ❷ نصف قياس ❸ قياس ❹ ضعف قياس

(٦) قياس الزاوية المركزية = ... الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس .

❶ ربع قياس ❷ نصف قياس ❸ قياس ❹ ضعف قياس

(٧) النسبة بين قياس الزاوية المركزية الى قياس الزاوية المحيطية التى تحصر نفس القوس

❶ ٣ : ١ ❷ ٢ : ١ ❸ ١ : ٢ ❹ ١ : ٣

(٨) قياس الزاوية المركزية يساوى .... القوس المقابل لها

❶ ربع قياس ❷ نصف قياس ❸ قياس ❹ ضعف قياس

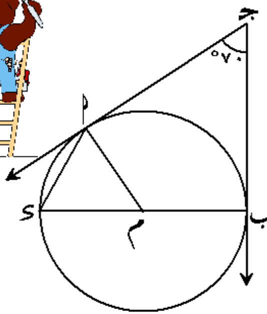
(٩) إذا كان قياس زاوية مركزية = ٩٠° فان قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس = ...

❶ ٩٠° ❷ ٤٥° ❸ ١٨٠° ❹ ٣٦٠°

(١٠) فى أى دائرة الزاوية لمحيطية التى قياسها س° فان قياس الزاوية المركزية لمشتركة معها فى نفس القوس تساوى ....

❶ س° ❷ $س^2$° ❸ ٢س° ❹ $\frac{١}{٢}$ س°



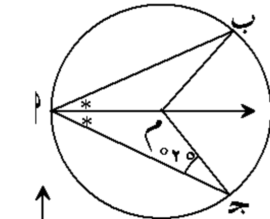


[٢] فى الشكل المقابل : إذا كان : $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ مماسين للدائرة م ،

ق (∠ جـ) = ٧٠° فان ق (∠ أ ء م) = ...

❶ ٣٥° ❷ ٥٥°

❸ ٦٥° ❹ ٤٥°

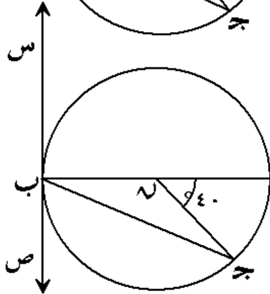


[٣] فى الشكل المقابل : إذا كان : $\overleftarrow{أ م}$ ينصف (∠ ب أ جـ)

، ق (∠ أ جـ م) = ٢٥° فان : ق ($\frown{ب جـ}$) = ...

❶ ٢٥° ❷ ٥٠°

❸ ١٠٠° ❹ ١٤٠°



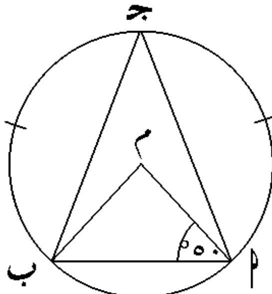
[٤] فى الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة مركزها ن ،

$\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة عند ب ، ق (∠ أ ن جـ) = ٤٠°

فان : ق (∠ جـ ب ص) = ...

❶ ٤٠° ❷ ٥٠°

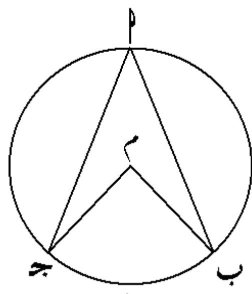
❸ ٢٠° ❹ ٧٠°



[٥] فى الشكل المقابل : ق (∠ جـ أ م) = ...

❶ ٢٠° ❷ ٤٠°

❸ ٣٠° ❹ ٥٠°



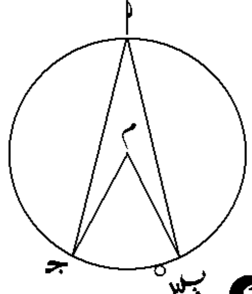
[٦] فى الشكل المقابل :

دائرة م ، ق (∠ أ) + ق (∠ ب م جـ) = ١٥٠°

فان : ق (∠ أ) = ...

❶ ١٠٠° ❷ ٤٥°

❸ ٧٥° ❹ ٥٠°



[٧] فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ ب م جـ) – ق (∠ أ) = ٣٠°

فان : ق (∠ أ) = ...

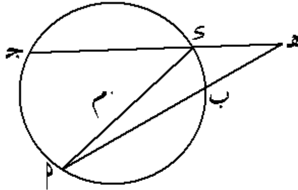
❶ ١٥٠ ❷ ٤٥° ❸ ٦٠° ❹ ٣٠°

(ن) اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة :

❶ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

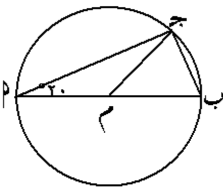
❷ الزاوية المركزية المرسومة فى نصف دائرة ....

❸ قياس الزاوية المركزية = ... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس .



❹ فى الشكل المقابل : ق (⌒أ جـ) = ٧٠° ، ق (⌒ب ء) = ٣٠°

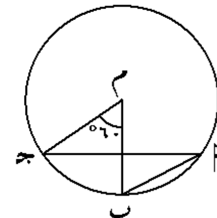
فان : ق (∠ هـ) = ...°



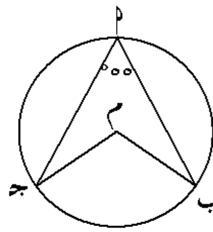
❺ فى الشكل المقابل : أ ب قطر فى دائرة م ، ق (∠ جـ أ ب) = ٢٠°

(١) ق (∠ ب م جـ) = ...°   (٢) ق (⌒أ جـ) = ...°

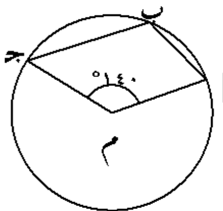
❻ فى جميع الأشكال التالية : احسب قياسات الزوايا المطلوبة



ق (∠ ب أ جـ) = ...°

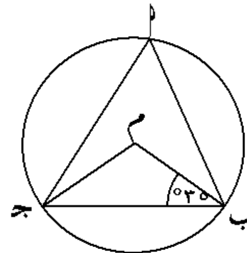


ق (∠ ب م جـ) = ...°

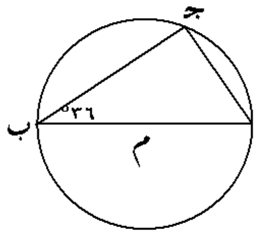


ق (∠ أ ب جـ) = ...°

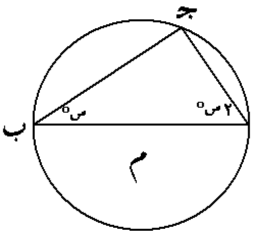
❼ فى جميع الأشكال التالية : احسب قياسات الزوايا المطلوبة



ق (∠ ب أ جـ) = ...°

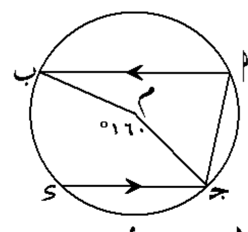


ق (∠ جـ أ ب) = ...°

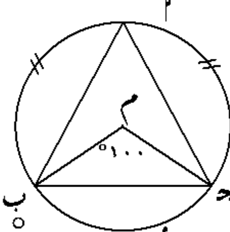


ق (∠ أ ب جـ) = ...°

أ جـ = ... أ ب

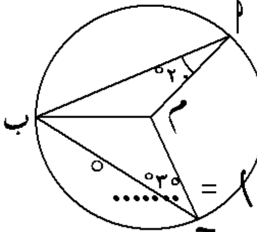


ق (∠ أ جـ ء) = ...°



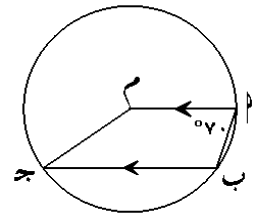
ق (∠ أ جـ ب) = ...°

ق (∠ أ ب م) = ...°

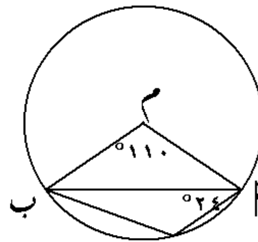


ق (∠ أ م جـ) = ...°

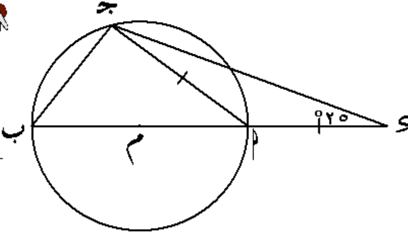




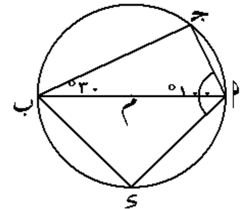
ق(∠ أ م جـ) = ... °



ق(∠ أ ب جـ) = ... °

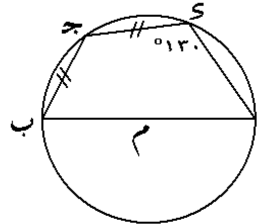


ق(∠ أ ب جـ) = ... °

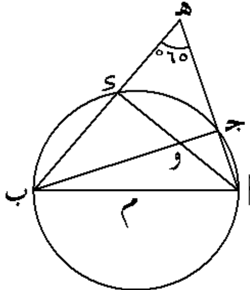


ق(∠ ء أ ب) = ... °

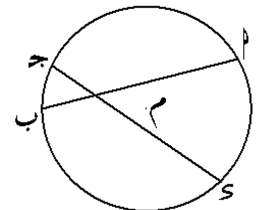
ق(∠ أ ب ء) = ... °



ق(∠ ء جـ ب) = ... °



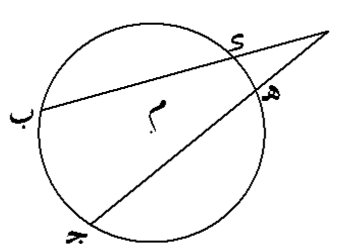
ق(∠ جـ و ء) = ... °



ق(أ⌒ء) = ٧٠°

ق(ب⌒جـ) = ٣٠°

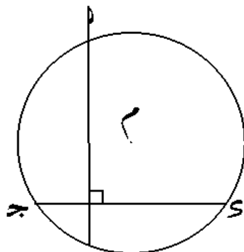
فان ق(∠ أ هـ ء) = ... °



ق(جـ⌒ب) = ١٤٠°

ق(ء⌒هـ) = ٣٠°

فان ق(∠ أ) = ... °



ق(أ⌒ء) = ١٥٠°

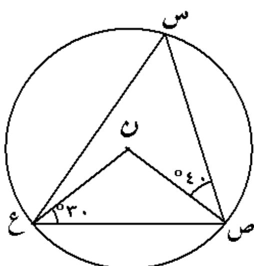
ق(ب⌒جـ) = ... °

❼ **فى الشكل المقابل :** س ص ع △ مرسوم داخل دائرة ن

، ق(∠ س ص ن) = ٤٠° ، ق(∠ ن ع ص) = ٣٠°

① ق(∠ ن) = ... ② ق(∠ س) = ...

③ ق(س⌒ع) = ... ④ ق(س⌒ص) = ...

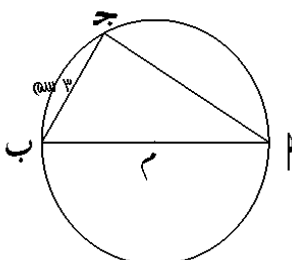


❽ **فى الشكل المقابل :** $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة م ،

طول نصف قطرها ٢,٥سم فإذا كان : ب جـ = ٣سم أكمل :

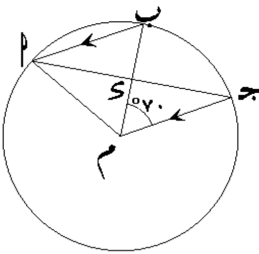
محيط △ أ ب جـ = ...سم

مساحة △ أ ب جـ = ...سم²





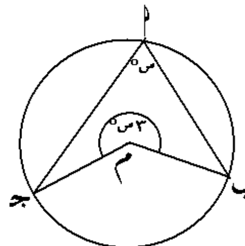
✍ [٩] فى الشكل المقابل :



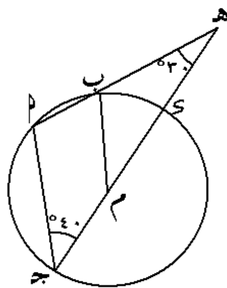
دائرة م ، ق (∠ جـ م ب) = ٧٠° ، م جـ // أ ب

أوجد : ق (∠ أ ء م)

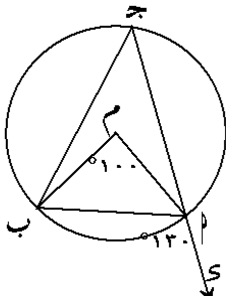
✍ [١٠] فى الشكل المقابل :



أوجد قيمة س .



✍ [١١] فى الشكل المقابل :

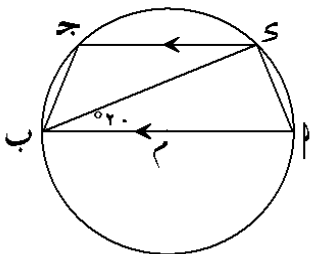


جـ ء قطر فى الدائرة م ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ،

ق (∠ أ جـ ء) = ٤٠° ، ق (∠ هـ) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ ب م جـ)

✍ [١٢] فى الشكل المقابل :



أ ب جـ △ مرسوم داخل الدائرة م ،

ء ∈ جـ أ ، ق (∠ ب أ ء) = ١٣٠° ، ق (∠ أ م ب) = ١٠٠°

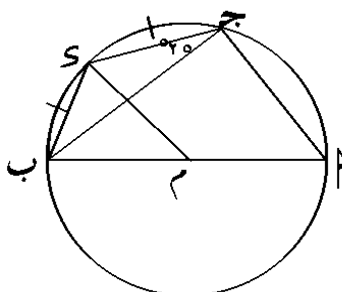
أوجد : ق (∠ م ب جـ)

✍ [١٣] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى دائرة م ، ء جـ // أ ب ، ق (∠ أ ب ء) = ٢٠°

أثبت أن : أ ء = جـ ب

أوجد : ق (ب جـ⌒) ، ق (ء جـ ب⌒)



✍ [١٤] فى الشكل المقابل :

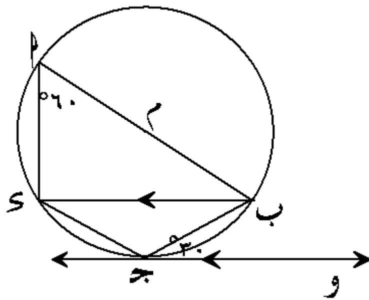
أ ب قطر فى الدائرة م ،

ق (جـ ء⌒) = ق (ء ب⌒) ، ق (∠ ء جـ ب) = ٢٥°

أوجد : ق (∠ أ جـ ء) ، ق (∠ ء ب أ)

برهن أن : م ء // أ جـ

(١٥) فى الشكل المقابل :

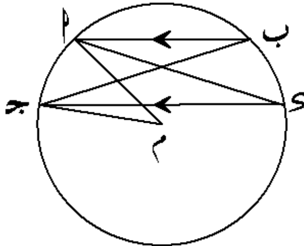


أ ب قطر فى الدائرة م ، ب ء // جـ و ،

ق(∠ ب أ ء) = ٦٠° ، ق(∠ و جـ ب) = ٣٠°

أوجد : ق(∠ أ ب ء) ، ق(∠ ب أ جـ)

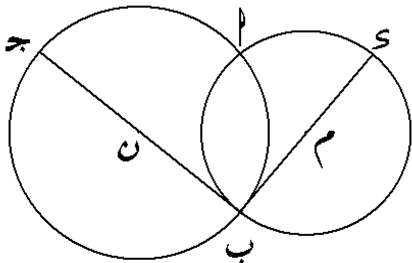
(١٦) فى الشكل المقابل :



دائرة م ، أ ب // جـ ء ، ق(أ ء) = ٧٠°

أوجد : ق(∠ أ م ء) ، ق(∠ ب ء جـ)

(١٩) فى الشكل المقابل :

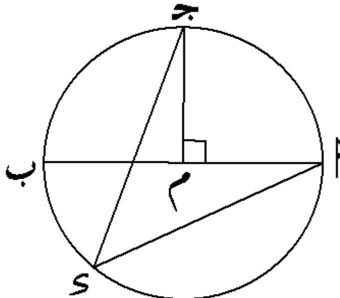


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ،

ب جـ قطر فى الدائرة م ، ب ء قطر فى الدائرة ن

اثبت أن : جـ ، أ ، ء على استقامة واحدة

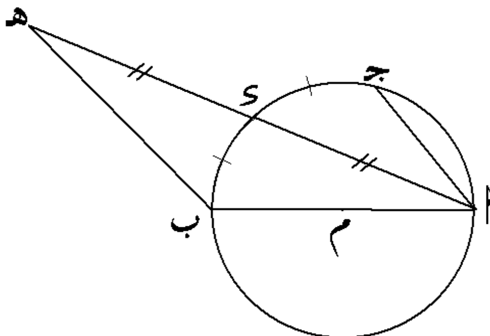
(٢٠) فى الشكل المقابل :



أ ب قطر فى الدائرة م ، م جـ ⊥ أ ب أوجد : ق(∠ أ ء جـ)

إذا كان أ م = ٧سم ، ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) . أوجد طول القوس الأكبر أ جـ

(٢١) فى الشكل المقابل :

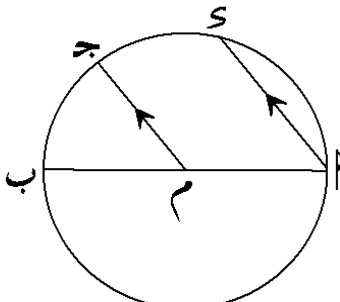


أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ وتر فيها ،

ء منتصف ب جـ ، هـ ∈ أ ء بحيث أ ء = ء هـ

برهن أن : أ جـ // ب هـ

(٢٢) فى الشكل المقابل :



أ ب قطر فى الدائرة م ، أ ء // م جـ

اثبت أن : جـ منتصف ء ب

(٢٣) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ؟ ، ب ، ؟ ء ، ؟ هـ وتران فى الدائرة م ،

سم ء ؟ ، هـ ؟ فقطعا الدائرة ن فى جـ ، و على الترتيب

اثبت أن : ق(∠ ء م هـ) = ق(∠ و ن جـ)

(٢٤) فى الشكل المقابل :

؟ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، سم ؟ ب ، جـ ء متقاطعان فى س

حيث (∠ س) = ٣٦° ، ق (؟ جـ) = ٨٤°

اوجد : ق(∠ ؟ ص جـ)

(٢٤) فى الشكل المقابل :

؟ ب قطعة مماسية للدائرة م عند ؟ ، ؟ جـ قطر ، م ء // ؟ ب

، ق(∠ ب) = ٣٦° أوجد : ❶ ق(∠ و جـ م)

❷ ق(∠ و جـ ء)

(٢٥) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ؟ م ب) = ١٢٠° ، ء ∈ ؟ جـ

أوجد : ق(∠ ب جـ ء)

(٢٦) فى الشكل المقابل :

؟ ب جـ △ مثلث مرسوم داخل الدائرة م ،

ق(∠ ب م جـ) = ١٣٠° ، ق(∠ ؟ جـ ب) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ ؟ ب جـ)

(٢٧) فى الشكل المقابل :

؟ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ،

ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

أوجد : ق(∠ ب جـ ء) ، ق(∠ ب ؟ ء)

(٢٨) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م ، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ نصفا قطرين فيها ،

ق(∠ م أ ب) = ٢٦° ، س ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

أوجد : ق(∠ أ م ب) ق(∠ أ جـ ب)

ق(∠ أ س ب) ق($\overset{\frown}{\text{أ س ب}}$)

(٢٩) فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ) = ٣٠° ، ب جـ = ٧سم

أوجد مساحة الدائرة م ($\pi = \frac{22}{7}$)

(٣٠) فى الشكل المقابل :

م دائرة ، ق(∠ أ م جـ) = ١١٢° ،

أ ب = ء ب ، ب ∈ $\overline{\text{ء جـ}}$

أوجد : ق(∠ ء)

(٣١) فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ ب جـ)

ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) الأكبر .

(٣٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران فى الدائرة م ،

ق(∠ ب أ جـ) = ١٠٠° ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

أوجد : ق(∠ أ م ء)

(٣٣) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة عند جـ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

، ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

أثبت أن : △ جـ أ ب متساوى الأضلاع .

(٣٤) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

أثبت ان : ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ أ ء ب)

(٣٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{جـم}$ // $\overline{أب}$ ،

$\overline{بجـ} \cap \overline{أم}$ = { هـ }

أثبت أن : ب هـ > أ هـ

(٣٦) فى الشكل المقابل :

م دائرة فيها أ ب = أ جـ

، ق(∠ م أ ب) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ م ب جـ)

(٣٧) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، $\overline{بجـ}$ // $\overline{أم}$

، ق(∠ أ م ب) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ أ جـ ب) ، ق($\overset{\frown}{أب}$) ، ق($\overset{\frown}{بجـ}$)

(٣٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان : م مركز دائرة ،

ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ ب) أوجد : ق(∠ ب)

(٤٢) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز فى م طولا نصفى قطريهما نق ، ٢نق رسم $\overline{أب}$ وترا فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى في ء أوجد : ق($\overset{\frown}{أب}$ الأكبر)

وإذا كانت : هـ ∈ $\overset{\frown}{أب}$ أوجد : ق(∠ أ هـ ب) (إرشاد : ارسم $\overline{أم}$ ، $\overline{بم}$ ، $\overline{مهـ}$)

(٤٣) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء = أ جـ ق(∠ ب أ ء) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ ب جـ ء)



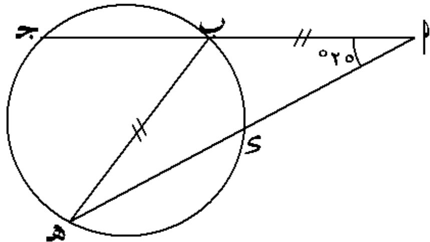
تمارين [٣] على تمارين مشهورة

✍ [١] اكمل ما يأتى

❶ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس القوس المقابل لها .

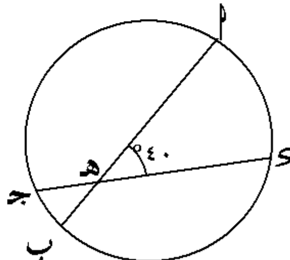
❷ قياس القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٤٠° يساوى ....°

❸ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون ....



❹ فى الشكل المقابل : أ ب = ب هـ ، ق(∠ هـ أ جـ) = ٢٥°

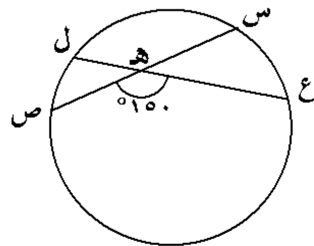
فان : ق(⌒جـ هـ) = ...°



❺ فى الشكل المقابل :

ق(⌒أ جـ) = ٥٠° ، ق(∠ أ هـ جـ) = ٤٠°

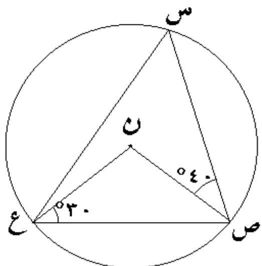
فان : ق(⌒ء ب) = ...°



❻ فى الشكل المقابل :

إذا : ق(∠ ع هـ ص) = ١٥٠°

فان : ق(⌒س ع) + ق(⌒ل ص) = ...°

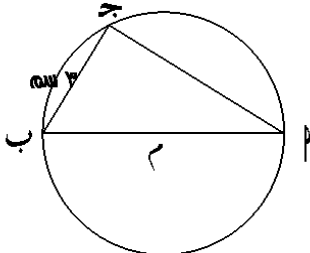


❼ فى الشكل المقابل: س ص ع △ مرسوم داخل دائرة ن ، ق(∠ س ص ن) = ٤٠°

، ق(∠ ن ع ص) = ٣٠°

(١) ق(∠ ن) = ... (٢) ق(∠ س) = ...

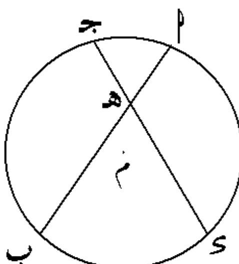
(٣) ق(⌒س ع) = ... (٤) ق(⌒س ص) = ...



❽ فى الشكل المقابل : أ ب قطر فى دائرة م ،

طول نصف قطرها ٢,٥سم فإذا كان : ب جـ = ٣سم أكمل :

(١) محيط △ أ ب جـ = ...سم (٢) مساحة △ أ ب جـ = ...سم²

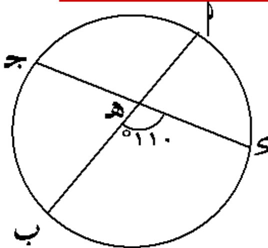


❾ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(⌒أ جـ) + ق(⌒ب ء) = ٨٠°

فان : ق(∠ أ هـ جـ) = ...°





١٠ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ ء هـ ب) = ١١٠° ،

ق(ب⌢جـ) = ٧٠° فان : ق(أ⌢ء) = ...°

(٢) فى الشكل المقابل :

أب قطر فى لدائرة م ،

طول (أ⌢ء) = طول (ب⌢ء) ، ق(∠ جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد : ق(∠ جـ ب ء)

(٣) فى الشكل المقابل :

أب فى الدائرة م ، طول أ⌢ء = طول ء⌢جـ ،

ق(∠ أ ب جـ) = ٧٠°

أوجد كلا من : ق(∠ ء جـ أ) ، ق(∠ جـ أ ب)

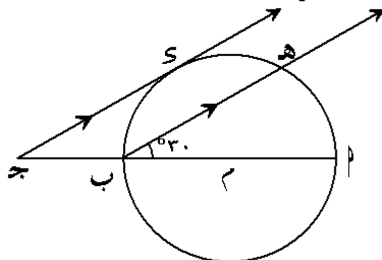
(٤) فى الشكل المقابل :

أب قطر فى الدائرة م ، أجـ تمس الدائرة عند أ

فإذا كان : أجـ = ٩سم ، ب م = ٦سم

أوجد طول كلا من : ب جـ ، أ ء

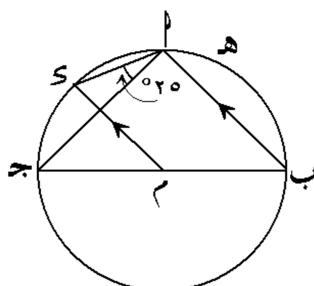
(٥) ب جـ قطر فى دائرة م،رسم لوتران ب ء ، ب هـ فى جهتين مختلفتين من ب جـ فإذا كان: ق(∠جـ ب هـ)=٥٢° ، ق(∠ ء ب جـ)= ٣٨° اوجد : ق(∠جـ هـ ب) ، ق(∠ ء جـ ب) اثبت أن : ء هـ قطر فى الدائرة م



(٦) فى الشكل المقابل :

جـ ء مماس للدائرة م ، أب قطر فيها ،

جـ ء // ب هـ ، ق(∠ أ ب هـ) = ٣٠° اثبت أن : ق(ب⌢ء)

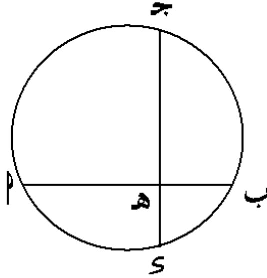


(٧) فى الشكل المقابل :

ب جـ قطر فى الدائرة م ، م ء // ب أ ،

ق(∠ جـ أ ء) = ٢٥°

أوجد : ق(∠ أ جـ ب)

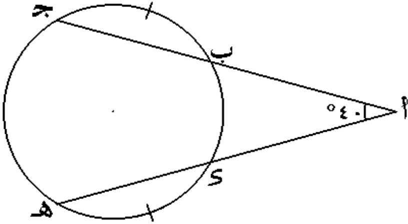


(٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ى}$ وتران فى الدائرة ، $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$

فإذا كان: ق($\overset{\frown}{ب ى}$) = ٦٠° ، ق($\overset{\frown}{أ ى}$) = ١٠٠° ، ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ١٢٠°

احسب : ق($\overset{\frown}{جـ ب}$) ، ق(∠ جـ هـ ب)



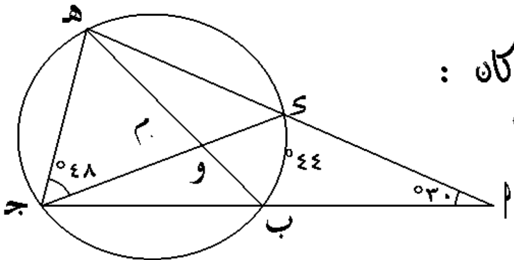
(٩) فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق($\overset{\frown}{ب ى}$) = ٦٠°

، ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق($\overset{\frown}{ى هـ}$)

أوجد : ق($\overset{\frown}{هـ جـ}$)   ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

(١٠) أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم $\overleftrightarrow{أ جـ}$ يقطع الدائرة فى ب ، جـ رسم $\overleftrightarrow{أ هـ}$ يقطع الدائرة فى ى ، هـ ، إذا كان : ق(∠ جـ م هـ) = ١٠٠° ، ق(∠ ب م ى) = ٤٠° أوجد : ق(∠ أ)

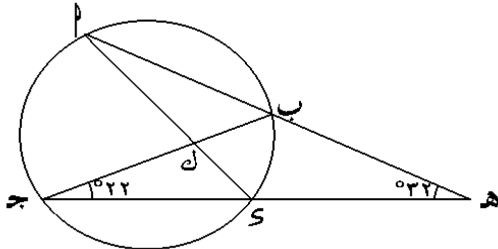


(١١) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{جـ ب} \cap \overleftrightarrow{هـ ى} = \{أ\}$ ، $\overleftrightarrow{ب هـ} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{و\}$ فإذا كان :

ق(أ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{ب ى}$) = ٤٤° ، ق(∠ ى جـ هـ) = ٤٨°

أوجد : ق($\overset{\frown}{جـ هـ}$)   ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

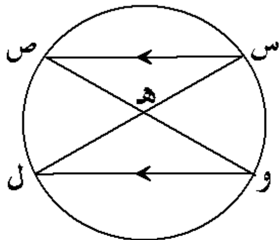


(١٢) فى الشكل المقابل :

هـ نقطة خارج دائرة ، $\overline{أ ى}$ ، $\overline{ب جـ}$ وتران فيها متقاطعان فى نقطة ك

بحيث : ق(∠ جـ) = ٢٢° ، ق(∠ هـ) = ٣٢°

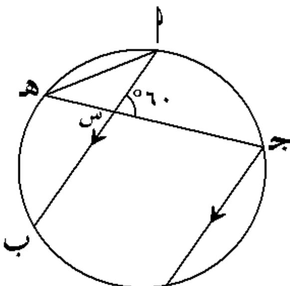
أوجد : ق(∠ أ ك جـ)



(١٣) فى الشكل المقابل :

$\overline{س ص} \parallel \overline{و ل}$ ، $\overline{و ص} \cap \overline{س ل} = \{هـ\}$

اثبت أن : ❶ س ل = و ص   ❷ ق(∠ س هـ و) = ق($\overset{\frown}{س و}$)



(١٤) فى الشكل المقابل :

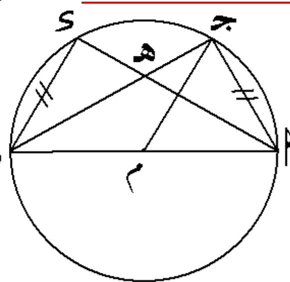
$\overline{أ ب} \parallel \overline{جـ ى}$ ، ق(أ س جـ) = ٦٠° ، ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ٨٠°

أوجد بالبرهان : ❶ ق(∠ أ هـ جـ) ❷ ق($\overset{\frown}{ب ى}$) ❸ ق($\overset{\frown}{ب هـ}$)

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



✍ [١٥] فى الشكل المقابل :

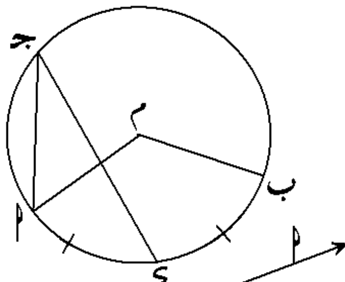


$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ وتران متساويان فى الطول ،

$\overline{أ ء} \cap \overline{ب جـ} = \{ هـ \}$

اثبت أن : ق($\angle$ أ م جـ) = ق($\angle$ أ هـ جـ)

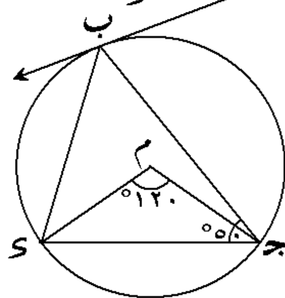
✍ [١٦] فى الشكل المقابل :



ء منتصف $\overset{\frown}{أ ب}$

اثبت أن : ق($\angle$ أ جـ ء) = $\frac{1}{4}$ ق($\angle$ أ م ب)

✍ [١٧] فى الشكل المقابل :

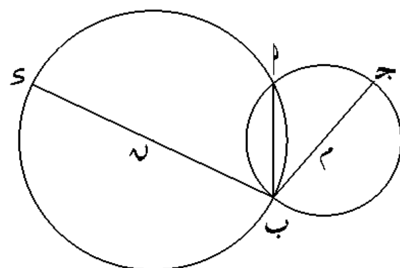


$\overleftrightarrow{ب أ}$ مماس لدائرة م عند ب ، طول نصف قطرها ٤,٥سم

، ق($\angle$ جـ م ء) = ١٢٠°، ق($\angle$ ب جـ ء) = ٥٠° أوجد :

❶ ق($\overset{\frown}{ب ء جـ}$) ❷ طول ($\overset{\frown}{ب ء جـ}$)

✍ [١٩] فى الشكل المقابل :

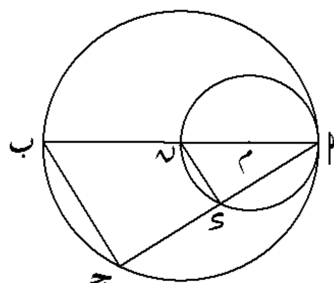


الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

فإذا كان : $\overline{ب جـ}$ قطرا فى الدائرة م ، $\overline{ب ء}$ قطرا فى الدائرة ن

اثبت أن : النقط : جـ ، أ ، ء على استقامة واحدة

✍ [٢٠] فى الشكل المقابل :

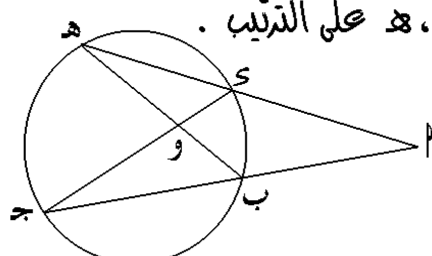


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، الدائرة م تمر بمركز الدائرة ن ، $\overline{أ ب}$ فى الدائرة ن

، م تنتمى الى $\overline{أ ب}$ ، رسم $\overrightarrow{أ جـ}$ فقطع الدائرة ن فى جـ ، الدائرة م فى ء

اثبت أن $\triangle$ أ ء ن $\sim$ $\triangle$ أ جـ ب

✍ [٢١] فى الشكل المقابل :



أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{أ هـ}$ يقطعان الدائرة فى ب ، جـ ، ء ، هـ على الترتيب .

فإذا كان : $\overline{جـ ء} \cap \overline{ب هـ} = \{ و \}$

اثبت أن : ق($\angle$ أ) + ق($\angle$ ب و ء) = ٢ ق($\angle$ هـ ب جـ)



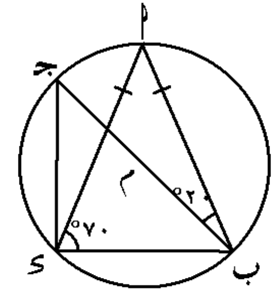
تمارين [٤] على الزوايا المحيطية المرسوم على نفس القوس

[١] اكمل ما يأتى

❶ الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة ....

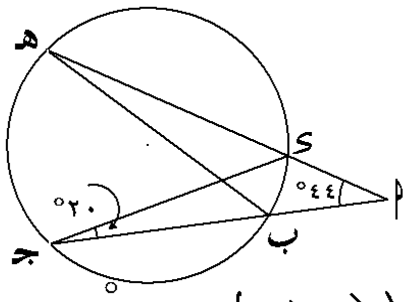
❷ الزوايا المحيطية التى تحصر أقواس متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة ....

❸ إذا تقاطع وتران داخل دائرة فان حاصل ضرب طولى جزئى الوتر الأول يساوى ....



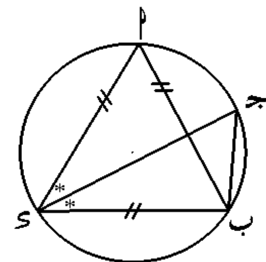
فان : ❶ ق(∠ جـ) = ...°

❷ ق(∠ ب د جـ) = ...°



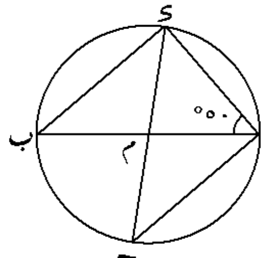
❶ ق(∠ ب هـ د) = ...°

❷ ق(∠ أ ب هـ) = ...°



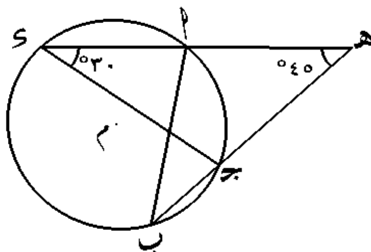
ق(∠ جـ) = ...°

ق(∠ جـ ب أ) = ...°



ق(∠ جـ) = ...°

ق(∠ ب د جـ) = ...°



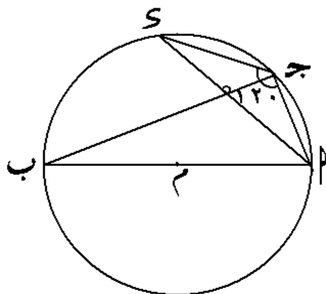
ق(∠ ب) = ...°

ق(∠ د أ ب) = ...°

[٢] فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ جـ د) = ١٢٠°

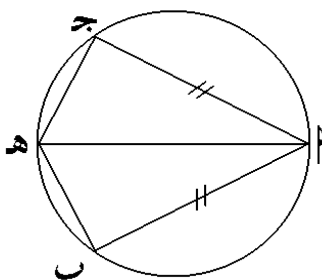
أوجد : ق(∠ ب أ د)



[٣] فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، هـ ∈ $\overset{\frown}{ب جـ}$

اثبت ان : ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ هـ جـ)



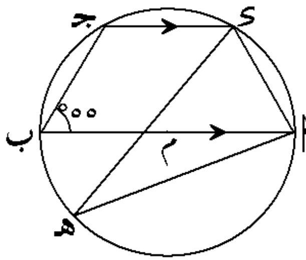


✍ [٤] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ،

$\overline{ءجـ}$ // $\overline{أب}$ ، ق($\angle$ أ ب جـ) = ٥٥°

أوجد : ق($\angle$ أ هـ ء)

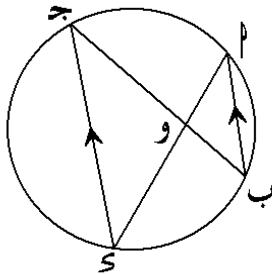


✍ [٥] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان فى الدائرة ،

$\overline{أء}$ ∩ $\overline{جـ ب}$ = { و }

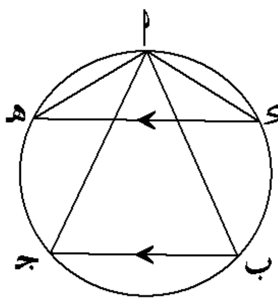
اثبت أن : أ و = وب



✍ [٦] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة ، $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

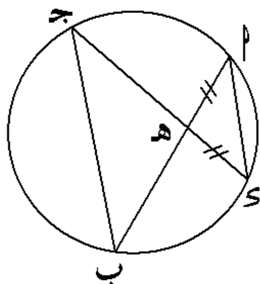
اثبت أن : ق($\angle$ ء أ جـ) = ق($\angle$ ب أ هـ)



✍ [٧] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { هـ } ، هـ أ = هـ ء

اثبت أن : هـ ب = هـ جـ

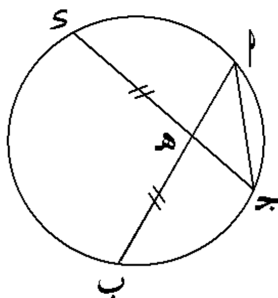


✍ [٨] 📖 فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة ،

$\overline{أب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { هـ }

اثبت أن : △ أ جـ هـ متساوى الساقين

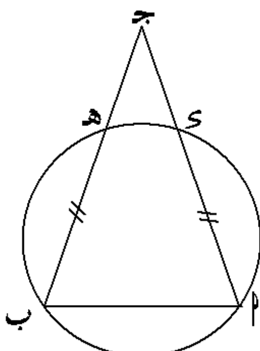


✍ [٩] 📖 فى الشكل المقابل :

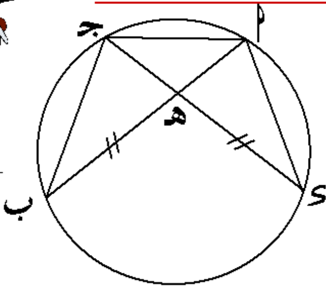
$\overline{أء}$ ، $\overline{ب هـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة

، $\overleftarrow{أء}$ ∩ $\overleftarrow{ب هـ}$ = { جـ }

اثبت أن : جـ ء = جـ هـ







[١٠] في الشكل المقابل :

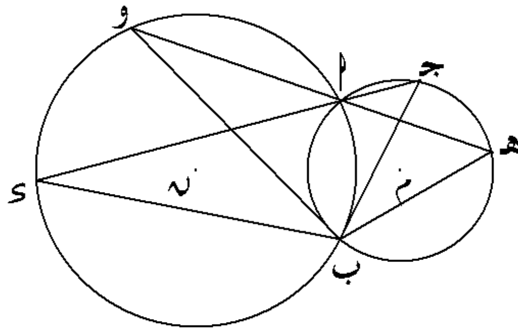
$\overline{أب}$ ، $\overline{دج}$ وتران في دائرة متقاطعان في هـ ، أهـ = جهـ

اثبت أن : ق(∠ أجب) = ق(∠ جأد)

[١١]

$\overline{أب}$ قطر في دائرة م ، ق(∠ أبج) = ٤٠° ، د ∈ $\overset{\frown}{بج}$ اوجد : ق(∠ جدب)

[١٢] في الشكل المقابل :



م ، دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ،

$\overleftrightarrow{أج}$ يقطع الدائرة م في ج ويقطع الدائرة ن في د ،

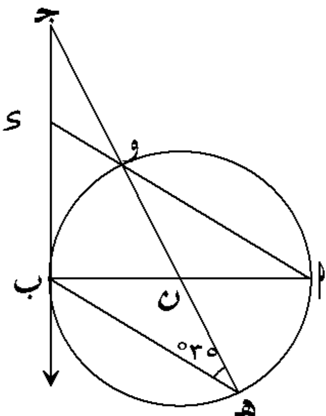
$\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة م في هـ ويقطع الدائرة ن في و

اثبت أن : ق(∠ هـبج) = ق(∠ وبد)

[١٣] $\overline{أب}$ ، $\overline{جب}$ وتران في دائرة متقاطعان في هـ فإذا كانت أطوال : $\overline{أهـ}$ ، $\overline{بهـ}$ ، $\overline{جد}$ هي على الترتيب ٥سم ، ٦سم ، ١١,٥سم احسب طول كل من : $\overline{هـج}$ ، $\overline{هـد}$

[١٤] دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٤سم ، فرضت نقطة ج حيث م ج = ٦سم ، رسم من ج قاطع للدائرة قطعها في النقطتين أ ، ب حيث أ∈ $\overline{جب}$ فاذا كان : ج أ = ٣سم أوجد طول : $\overline{أب}$

[١٥] في الشكل المقابل :



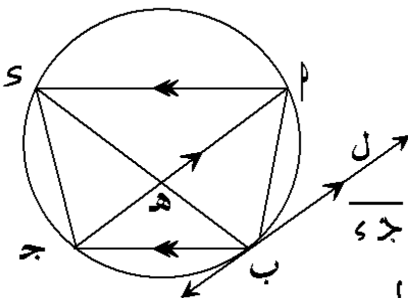
$\overline{أب}$ قطر في دائرة مركزها ن ، $\overleftarrow{جب}$ مماس للدائرة عند ب

، رسم $\overleftarrow{جن}$ فقطع الدائرة في و ، هـ ورسم $\overleftarrow{أو}$ فقطع $\overleftarrow{جب}$ في د

فإذا كان : ق(∠ بهـج) = ٣٥° أوجد :

❶ ق(∠ بنج) ، ❷ ق(∠ بجن) ، ❸ ق(∠ بدأ)

[١٦] في الشكل المقابل :

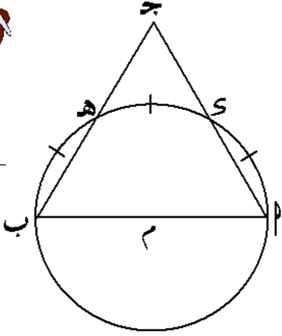


$\overline{بج}$ // $\overline{أد}$ ، $\overline{أج}$ ∩ $\overline{بد}$ = { هـ } ، $\overleftrightarrow{بل}$ // $\overline{أج}$ أثبت أن :

❶ $\overleftarrow{دب}$ ينصف (∠ أدج) ❷ ق(∠ جبد) = ق(∠ جدب)

[١٧] △ أبج متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة م ، رسم القطر $\overline{جد}$

اثبت أن : ق(∠ أبد) = ق(∠ جبم) = ق(∠ أجد)

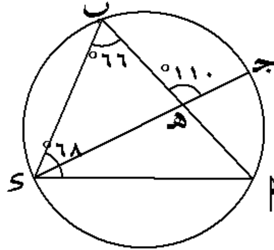


(١٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م حيث ء ، هـ تنتميان الى $\overset{\frown}{أب}$

ق $(\overset{\frown}{أء})$ = ق $(\overset{\frown}{ءهـ})$ = ق $(\overset{\frown}{هـب})$ ، $\overleftrightarrow{أء} \cap \overleftrightarrow{بهـ} = \{جـ\}$

اثبت أن : ❶ جـ أ = جـ ب ثم اوجد : ❷ ق $(\overset{\frown}{ءهـب})$

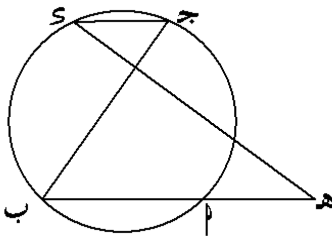


(١٩) فى الشكل المقابل :

ق $(\angle ب) = 66°$ ، ق $(\angle بهـجـ) = 110°$ ،

ق $(\angle أءب) = 68°$

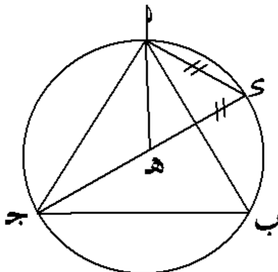
اثبت أن : $\overline{جـء}$ قطر فى الدائرة .



(٢٠) 📖 فى الشكل المقابل :

هـ نقطة خارج الدائرة

اثبت أن : ق $(\angle هـ) <$ ق $(\angle بجـء)$

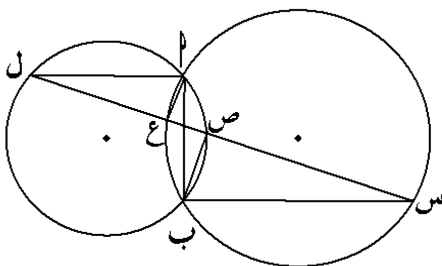


(٢١) 📖 فى الشكل المقابل :

△ أ ب جـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

، ء $\in \overset{\frown}{أب}$ ، هـ $\in \overline{ءجـ}$ بحيث أ ء = ء هـ

اثبت أن : △ أ ء هـ متساوى الأضلاع .

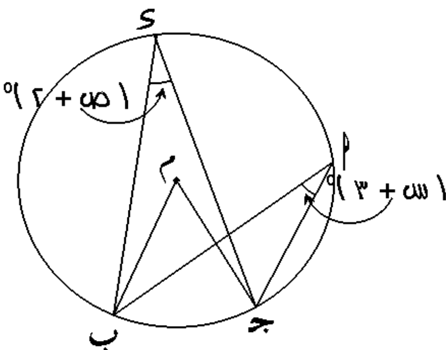


(٢٢) فى الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{سل}$

فقطع الدائرة الأولى فى س ، ع والثانية فى ص ، ل

اثبت أن : ق $(\angle عأل)$ = ق $(\angle سبص)$



(٢٣) فى الشكل المقابل :

م دائرة ، أ ، ء زاويتان محيطيتان

قياسهما (س + ٣)° ، (ص + ٢)° على الترتيب

فإذا كان : $ص^2 - س^2 = 53$ أوجد : ق $(جـمب)$

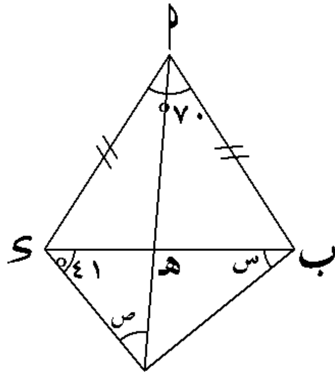


الوحدة الخامسة

١ الشكل الرباعى الدائرى

٢ خواص الشكل الرباعى الدائرى

تمارين على الرباعى الدائرى

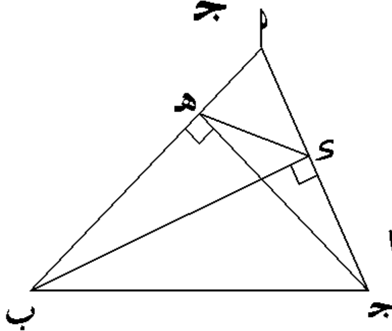


✍ (١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، أ ب = أ ء

، ق(∠ ب أ ء) = ٧٠° ، ق(∠ ب ء جـ) = ٤١°

أوجد قيمة كل من : س ، ص

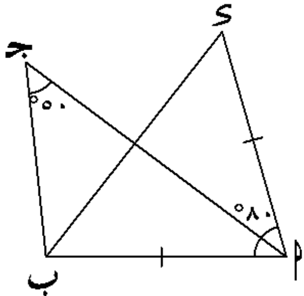


✍ (٢) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه : ب جـ = ١٠سم

، رسم $\overleftarrow{بء}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ فقطعه فى ء ، رسم $\overleftarrow{جـهـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ فقطعه فى هـ

اثبت أن : ب ، جـ ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة و أوجد طول نصف قطرها

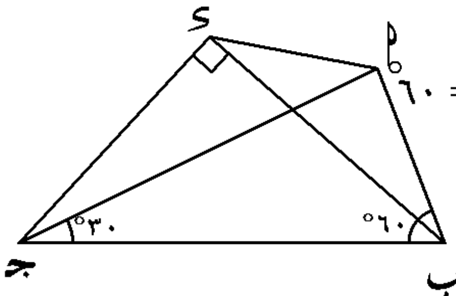


✍ (٣) 📖 فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، ق(∠ أ) = ٨٠°

، ق(∠ جـ) = ٥٠°

اثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تمر بها دائرة واحدة .

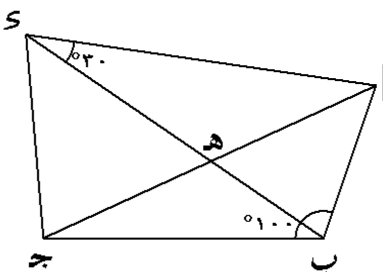


✍ (٤) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠° ، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠°

اثبت أن : ❶ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

❷ أوجد : ق(∠ ب ء أ)



✍ (٥) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق(∠ أ ب جـ) = ١٠٠°

، $\overline{أجـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = { هـ } فإذا كان : جا(∠ أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$

، ق(∠ أ ء ب) = ٣٠° اثبت أن : ❶ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

❷ ق(∠ ب ء جـ)

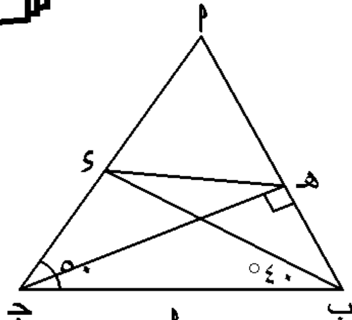


✍ [٦] فى الشكل المقابل :

جـ هـ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، ق(∠ أ جـ ب) = ٥٠°

، ق(∠ ء ب جـ) = ٤٠ أثبت أن : الشكل هـ ب جـ ء رباعى دائرى

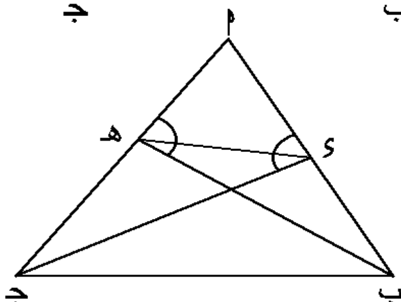
أوجد : ق(∠ ء هـ جـ)



✍ [٧] فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ ء جـ) = ق(∠ أ هـ ب)

أثبت أن : ء ب جـ هـ رباعى دائرى



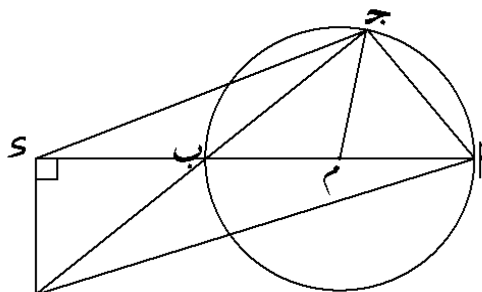
✍ [٨] فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$

، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ = {هـ}

أثبت أن : ❶ أ جـ ء هـ شكل رباعى دائرى .

❷ ق(∠ أ م جـ) = ٢ ق(∠ أ هـ جـ)

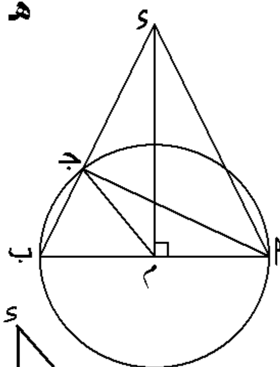


✍ [٩] فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{ء م}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ حيث ء خارج الدائرة

أثبت أن : ❶ الشكل أ ء جـ م رباعى دائرى

❷ ق(∠ جـ م ب) = ٢ ق(∠ ب ء م)

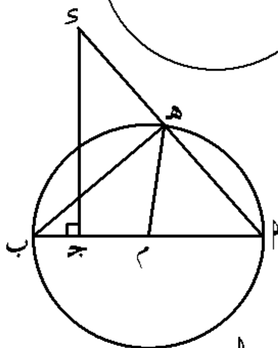


✍ [١٠] 📖 فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ هـ}$ وتر فيها ، رسم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ فقطع $\overleftrightarrow{أ هـ}$ فى ء

أثبت أن : ❶ النقط ء ، هـ ، جـ ، ب تمر بها دائرة واحدة .

❷ ق(∠ أ م هـ) = ٢ق(∠ ء)

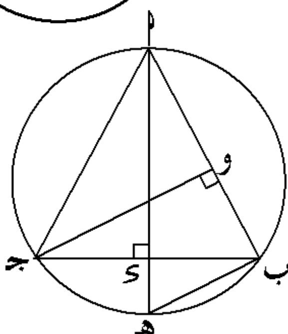


✍ [١١] فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ يقطعها فى ء ويقطع الدائرة فى هـ، $\overleftrightarrow{جـ و}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ يقطعها فى و

أثبت أن : ❶ الشكل أ و ء جـ رباعى دائرى

❷ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ ء و جـ)



(١٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ جـ}$ قطر فى دائرة م ، س منتصف $\overline{أ ب}$

، $\overleftrightarrow{جـ ص}$ مماس للدائرة قطع $\overleftrightarrow{س م}$ فى ص

اثبت أن : ❶ الشكل أ ب جـ ص رباعى دائرى .

❷ ق(∠ ب م جـ) = ٢ ق(∠ م ص جـ)

(١٣) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة قاطع قطره فى هـ

، س ∈ $\overline{ب هـ}$ بحيث س ص // $\overline{ب جـ}$

اثبت ان : ❶ أ س ص ء رباعى دائرى ❷ ق(∠ ب أ س) = ق(∠ جـ ء ص)

(١٤) 🕮 فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

$\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف (∠ ب أ جـ) ، $\overrightarrow{ء و}$ ينصف (∠ ب ء جـ)

اثبت أن : ❶ أ هـ و ء شكل رباعى دائرى . ❷ $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$

(١٥) 🕮

أ ب جـ ء مربع ، $\overrightarrow{أ س}$ ينصف (∠ ب أ جـ) ويقطع $\overline{ب ء}$ فى س ، $\overrightarrow{ء ص}$ ينصف (∠ جـ ء ب) ويقطع $\overline{أ جـ}$ فى ص

اثبت أن : ❶ الشكل أ س ص ء رباعى دائرى ❷ ق(∠ أ ص س) = ٤٥°

(١٦) 🕮 فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م حيث س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب . اثبت أن :

❶ الشكل أ س ص م رباعى دائرى ❷ ق(∠ م س ص) = ق(∠ م جـ ص)

❸ $\overline{أ م}$ قطر فى الدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص ، م

(١٧) فى الشكل المقابل :

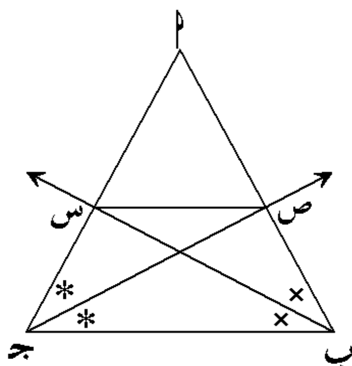
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى الدائرة م ، $\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { هـ } ،

ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب م هـ) اثبت أن :

❶ الشكل م جـ ب هـ رباعى دائرى . ❷ ق(∠ جـ هـ ب) = ٢ ق(∠ جـ ء ب)

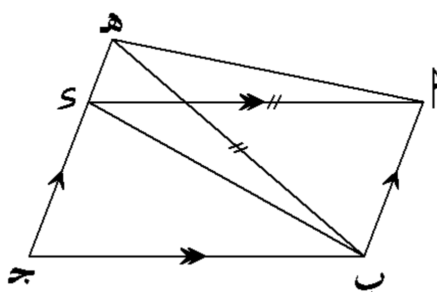


(١٨) Δ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة ، س ∈ أ ب ، ص ∈ أ جـ حيث: ق(أ س) = ق(أ ص)
جـ س ∩ أ ب = { ء } ، ب ص ∩ أ جـ = { هـ }
❶ اثبت أن : الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى . ❷ ق(∠ ء هـ ب) = ق(∠ س أ ب)



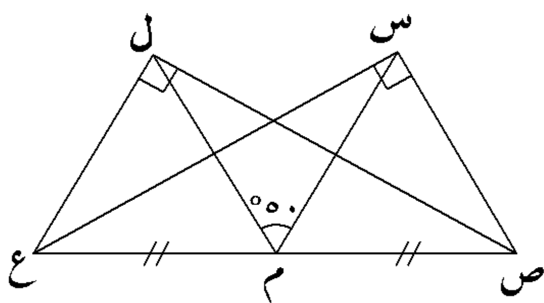
(١٩) فى الشكل المقابل :
أ ب جـ Δ فيه : أ ب = أ جـ ، ب س ينصف (∠ ب) ويقطع أ جـ فى س ،
جـ ص ينصف (∠ جـ) ويقطع أ ب فى ص
اثبت أن : ❶ ب جـ س ص رباعى دائرى . ❷ س ص // ب جـ

(٢٠) :
Δ أ ب جـ متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ ، ء منتصف ب جـ ، ب هـ ⊥ أ جـ
حيث ب هـ ∩ أ جـ = { هـ } اثبت أن : النقط أ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة .



(٢١) فى الشكل المقابل :
أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ جـ ء
حيث ب هـ = أ ء اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء هـ رباعى دائرى

(٢٢) فى الشكل المقابل :
ق(∠ ص س ع) = ق(∠ ص ل ع) = ٩٠°
، م منتصف ص ع ، ق(∠ س م ل) = ٥٠°
أوجد : ق(∠ س ص ل) بالدرجات ثم
اثبت أن : ق(∠ س ص ل) = ق(∠ س ع ل)
ق(∠ س م ع) = ق(س ل) + ق(ل ع)



(٢٣) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب جـ ، أ جـ ∩ ب ء = { و } حيث و ب = و جـ
اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٢٤) أ ب قطر فى الدائرة م ، هـ ∈ م أ ، رسم هـ ء ⊥ أ ب بحيث ء تقع خارج الدائرة م
، ء ب فقطع الدائرة فى جـ اثبت أن : أ هـ جـ ء شكل رباعى دائرى



خواص الرباعى الدائرى

(١) اكمل مايأتى :

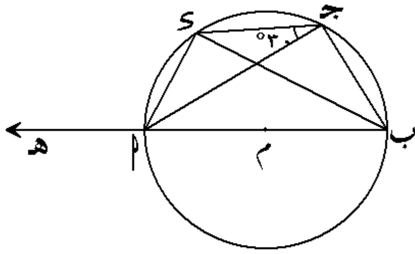
١ إذا كان الشكل الرباعى دائريا فان كل زاويتين متقابلتين فيه ....

٢ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى ....

٣ فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء ، إذا كان : ق(∠ جـ) = ١١٥ °، فان : ق(∠ أ) = ...°

٤ إذا كان أ ب جـ ء شكلا رباعيا دائريا، ق(∠ أ) = ٦٠ °، فان قياس الزاوية الخارجة عند الرأس جـ = ...°

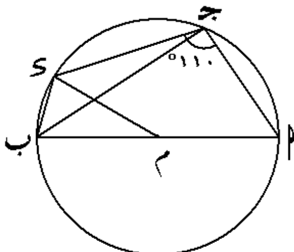
٥ فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م فإذا كان : ق(∠ ء جـ أ) = ٣٠ ° فان

(١) ق(∠ ء ب أ) = ...°   (٢) ق(∠ ء أ هـ) = ...°

٦ فى الشكل المقابل :



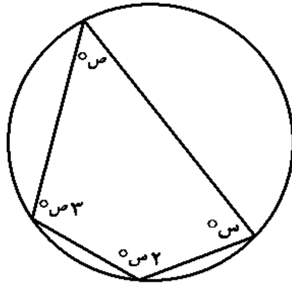
إذا كان : $\overline{أ ب}$ قطعا فى لدائرة م ، ق(∠ أ جـ ء) = ١١٠°

فان : (١) ق(∠ أ ب ء) = ...°

(٢) ق(∠ ء جـ ب) = ...°   (٣) ق(∠ ء م ب) = ...°

٧ إذا كان : أ ب جـ ء شكلا رباعيا دائريا ، كان : ق(∠ ب) = $\frac{١}{٤}$ ق(∠ ء) فان : ق(∠ ب) = ...°

٨ فى الشكل المقابل :



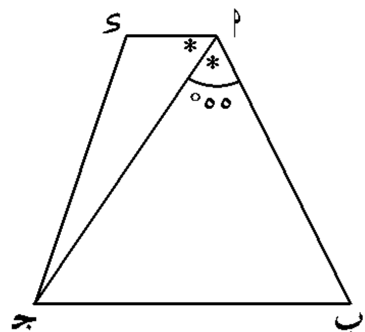
الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

فان : س = ...° ، ص = ...°

٩ فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء ،

إذا كان : ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ ب) = ٥ ق(∠ جـ) ، فان : ق(∠ ء) = ...°

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



١ فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء رباعى دائرى فيه : $\overrightarrow{أ جـ}$ ينصف (∠ ب أ ء)

، إذا كان : ق(∠ ب أ جـ) = ٥٥° فان : ق(∠ ب جـ ء) = ...

(١) ٥٥°   (٢) ٧٠ °

(٣) ١١٠ °   (٤) ١٢٥ °

❷ فى الشكل المقابل : ﺃ ب ﺟ ﺀ شكل رباعى دائرى ، ق(∠ ب ﺃ ﺟ) = ٤٠° ، ق(∠ ﺃ ﺀ ﻥ) = ١١٠° فان : ق(∠ ب ﺟ ﺃ) = ...

① ٣٠° ② ٤٠°

③ ٤٥° ④ ١١٠°

❸ فى الشكل المقابل : ﻫ ∈ $\overleftarrow{ﺀ ﺃ}$ ، $\overleftarrow{ﺃ و}$ ينصف ب ﺃ ﻫ ، ق(∠ ﻫ ﺃ و) = ٥٥°

فان : ق(∠ ب ﺟ ﺀ) = ...

① ٥٥° ② ١٠٠°

③ ١١٠° ④ ١٢٠°

❹ فى الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{ﺃ ب}$ قطرا فى الدائرة م ،

ق(∠ ب ﺃ ﺟ) = ٤٠° ، ق($\widehat{ﺃ ﺀ}$) = ق($\widehat{ﺀ ﺟ}$)

، ﻫ ∈ $\overleftarrow{ب ﺟ}$ فان : ق(∠ ﺃ ﺟ ب) = ...

① ٢٥° ② ٦٥°

③ ٩٠° ④ ١٣٠°

ق(∠ ﺃ ﺀ ﺟ) = ...

① ٢٥° ② ٦٥° ③ ٩٠° ④ ١٣٠°

ق(∠ ﺀ ﺃ ﺟ) = ...

① ٦٥° ② ٩٠° ③ ١٣٠° ④ ٢٥°

ق(∠ ﺀ ﺟ ﻫ) = ...

① ٢٥° ② ٦٥° ③ ٩٠° ④ ١٣٠°

❺ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ﺃ ب = ب ﺀ ، ق(∠ ﺃ ب ﺀ) = ٣٦°

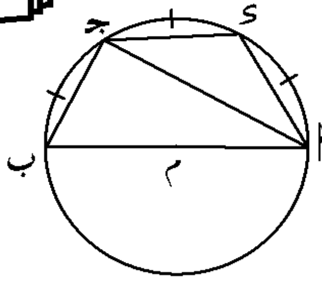
فان : ق(∠ ﺟ) = ...

① ١٤٠° ② ٧٠°

③ ٥٤° ④ ١٠٨°

❻ فى الشكل المقابل :





إذا كانت : م دائرة ، طول $\overset{\frown}{ب جـ}$ = طول $\overset{\frown}{جـ ء}$ = طول $\overset{\frown}{أ ء}$

فإن : ق(∠ ب جـ ء) = ...

(١) ٣٠° (٢) ٦٠°

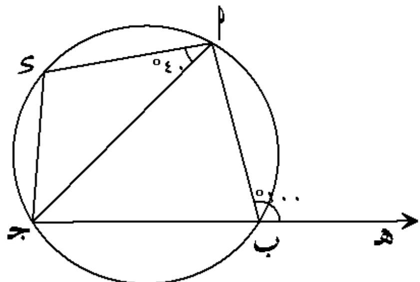
(٣) ١٠٠° (٤) ١٢٠°

[٣] في الشكل المقابل :

هـ ∈ $\overleftarrow{أ ب}$ ، هـ ∉ $\overline{أ ب}$ ، ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١١٠°

ق(∠ جـ ب هـ) = ٨٥° أوجد : ق(∠ ب ء جـ)

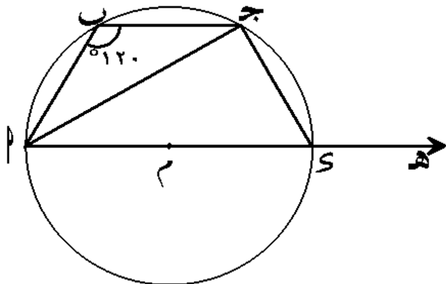
[٤] في الشكل المقابل :



ق(∠ أ ب هـ) = ١٠٠° ، ق(∠ جـ أ ء) = ٤٠°

أثبت أن : ق($\overset{\frown}{جـ ء}$) = ق($\overset{\frown}{أ ء}$)

[٥] في الشكل المقابل :



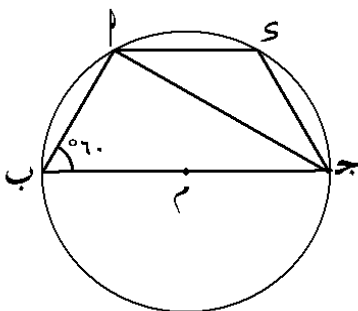
أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م فيه :

ق(∠ ب) = ١٢٠° ، $\overline{أ ء}$ قطر في الدائرة ، هـ ∈ $\overleftarrow{أ ء}$

أوجد : ق(∠ جـ ء هـ) ، ق(∠ جـ أ ء)

إذا كان : ء جـ = ٧سم فأوجد : طول $\overset{\frown}{أ ء}$ ($\pi = \frac{22}{7}$)

[٦] في الشكل المقابل :

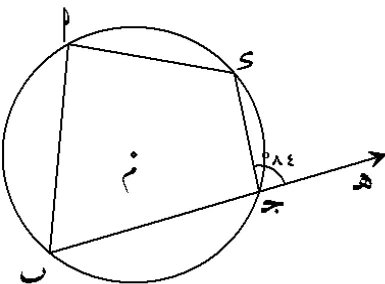


أ ب جـ ء شكل رباعي دائري ، $\overline{جـ ب}$ قطر فيها

، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠° ، طول $\overset{\frown}{أ ء}$ = طول $\overset{\frown}{جـ ء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{جـ أ}$ ينصف (∠ ء جـ ب)

[٧] في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م ، هـ ∈ $\overleftarrow{ب جـ}$

، ق(∠ ء جـ هـ) = ٨٤° ، ق(∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ء)

أوجد : ق(∠ أ) ، ق(∠ ب)

(٨) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فيه : ا ب = ا ء

، ق(∠ جـ ب ء) = ٢٥° ، هـ ∈ ب جـ ، ق(∠ هـ جـ ء) = ١٣٠°

اثبت أن : ا ء = ء جـ

(٩) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م

، م ∈ ا ب ، جـ ب = جـ ء ، ق (∠ ب جـ ء) = ١٤٠°

أوجد : ❶ ق(∠ ا) ❷ ق(∠ ء)

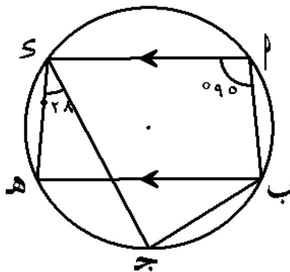
(١٠) فى الشكل المقابل :

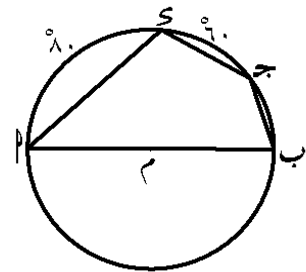
ا ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

ق (∠ جـ) = ٩٠° ، ا ب = ٦سم ، ا ء = ٨سم

اوجد : ق (∠ ا ب ء)

(١١) فى الشكلين المقابلين اوجد بالبرهان قياسات زوايا الشكل ا ب جـ ء :





(١٢) ا نقطة خارج دائرة ، رسم ا ب يقطع الدائرة فى ب ، جـ على الترتيب ،رسم ا ء يقطع الدائرة فى ء ، هـ على الترتيب ، فإذا كان : ا جـ = ا هـ

اثبت أن : ❶ ب ء // جـ هـ ❷ ق(ب جـ) = ق(هـ ء)

(١٣) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، ا ب قطر فيها .

ا ء = ء جـ فإذا كان : ق(∠ ب ا جـ) = ٣٥°

فأوجد : ❶ ق(∠ ء) ❷ ق(∠ ب جـ ء)

(١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فيه : ق (∠ أ) = ٧٠°

، هـ ∈ أ ب ، فإذا كان : جـ ء = جـ ب ، ء ب = ء أ

أوجد : ق (∠ هـ ب جـ)

(١٥) فى الشكل المقابل :

هـ ∈ ب جـ ، ق (∠ ب م ء) = ق (∠ ب جـ ء) = ٢ س°

، ق (∠ ء جـ هـ) = (ص + ٢٠)°

أوجد قيمة كل من : س ، ص

(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ،

أ هـ ينصف (∠ أ) ويلاقى الدائرة فى النقطة هـ

اثبت أن : جـ هـ ينصف (∠ س جـ ب)

(١٧) أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : أ ء // ب جـ ، ق (∠ جـ) = ١٠٥°

أوجد : ❶ ق (∠ أ) ❷ ق (∠ ب)

(١٨) أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : أ ب = أ ء ، ق (∠ جـ) = ١٢٤° ، ق (∠ ب أ جـ) = ٣٦°

أوجد : ❶ ق (∠ أ جـ ء) ❷ ق (∠ أ ء جـ)

(١٩) فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب جـ هـ) = ٦٠° ، ب جـ // م ء ، أ منتصف ب ء الأكبر

اثبت أن : ❶ الشكل ب م ء جـ معين ❷ أ جـ قطر فى الدائرة .

(٢٠) ب جـ قطر فى الدائرة م ، ب أ وتر فيها ، ء ∈ أ جـ بحيث : ق (∠ أ ء جـ) = ١١٨° ،

رسم أ هـ // ء جـ ويقطع الدائرة فى هـ .

❶ أوجد : ق (∠ أ ب جـ) ❷ اثبت أن : ق (∠ أ جـ ء) = ق (∠ جـ ب هـ)

[٢١] فى الشكل المقابل :

س منتصف $\overset{\frown}{\text{ص ل}}$ ، ق(∠ ص ع ن) = ٨٠°

، ق(∠ ص ل ع) = ٢٠°

أوجد : ❶ ق(∠ ع س ل) ❷ ق($\overset{\frown}{\text{س ص}}$ ع)

[٢٢]

أ ب جـ Δ حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ليقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ عند ء ويقطع الدائرة عند هـ ، رسم $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ليقطع $\overline{\text{أ ب}}$ عند و

اثبت أن : ❶ الشكل أ و ء جـ رباعى دائرى ❷ (∠ ب و ء) = ق (∠ ب هـ ء)

[٢٣] فى الشكل المقابل :

هـ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ،

و ب جـ ء شكل رباعى دائرى .

اثبت أن : الشكل هـ ب ء و رباعى دائرى

[٢٤] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء أ}}$ يقطع الدائرة م فى هـ و الدائرة ن في ء ،رسم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يقطع الدائرة م فى و ، الدائرة ن فى جـ ، ق(جـ) = ٧٠°

❶ أوجد : ق(∠ و) ❷اثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

[٢٥] فى الشكل المقابل :

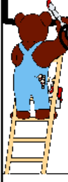
أ ب جـ ء متوازى أضلاع، الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء تقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ اثبت أن : أ ء = هـ ء

[٢٦] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة ، رسم $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ و يقطع الدائرة فى هـ

اثبت أن : ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ب أ هـ)

إذا كان : ق(∠ جـ) = ١٣٠° فأوجد : ق(∠ أ هـ ء)



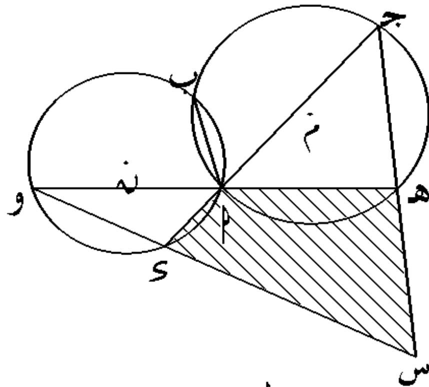
✍ **[٢٧]** أب قطر في الدائرة ، ء ∈ أب ، رسم ءهـ ⊥ أب بحيث هـ خارج الدائرة ، ورسم هـأ فقطع الدائرة في س ، رسم ءس فقطع الدائرة في ص

اثبت أن : ❶ الشكل هـ ب ء س رباعي دائري . ❷ ب أ ينصف (∠ هـ ب ص)

✍ **[٢٨]** أ ب جـ ء هـ مخمس مرسوم في نصف دائرة قطرها أ ب

اثبت أن : ق(∠ أ هـ ء) + ق(∠ ب جـ ء) = ٢٧٠°

✍ **[٢٩] في الشكل المقابل :**



أ ب وتر مشترك للدائرتين م ، ن ، جـ ∈ الدائرة م ، و ∈ الدائرة ن

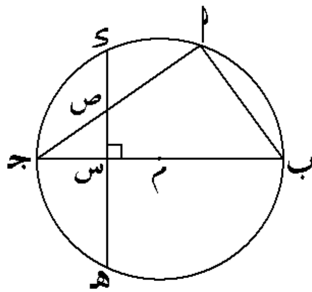
، فإذا كان: جـ أ يقطع الدائرة ن في ء ، و أ يقطع الدائرة م في هـ

فإذا كان : جـ هـ ∩ و ء = { س }

وكان الشكل أ هـ س ء رباعيا دائريا .

اثبت ان : جـ ، ب ، و تنتمي لخط مستقيم واحد

✍ **[١] في الشكل المقابل :**

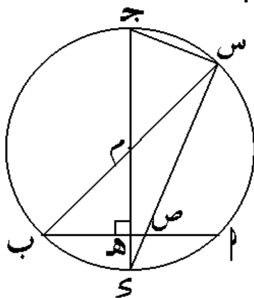


ب جـ قطر الدائرة م ، أ ∈ ب جـ ، ء هـ ⊥ ب جـ

بحيث ء هـ ∩ ب جـ = { س } ، ء هـ ∩ أ جـ = { ص }

اثبت أن : ❶ الشكل أ ب س ص رباعي دائري . ❷ ق(∠ جـ ص س) = $\frac{1}{2}$ ق(أ جـ)

✍ **[١٢] 📖 في الشكل المقابل :**

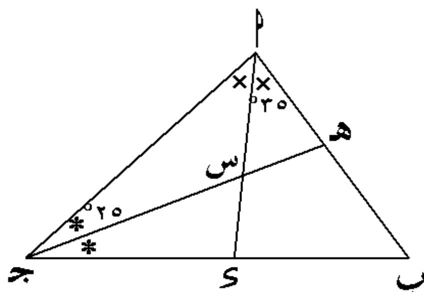


أ ب وتر في الدائرة م ، جـ ء قطر عمودي على أ ب

ويقطعه في هـ ، ب م يقطع الدائرة في س ، س ء ∩ أ ب = { ص }

اثبت أن : ❶ الشكل س ص هـ جـ رباعي دائري ❷ ق(∠ ء ص ب) = ق(∠ ء ب س)

✍ **[٢] في الشكل المقابل :**

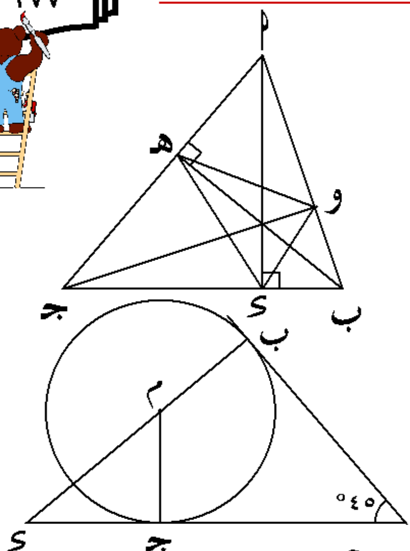


أ ء ينصف (∠ ب أ جـ) ، جـ س ينصف ∠ أ جـ ب

، ق(∠ ب أ ء) = ٣٥° ، ق(∠ أ جـ هـ) = ٢٥°

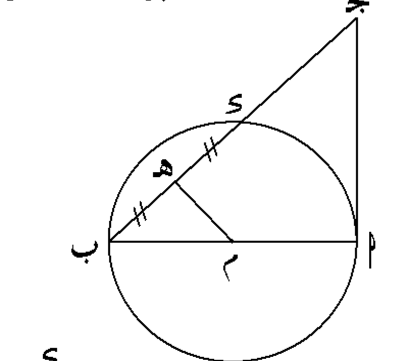
اثبت أن : الشكل ب هـ س ء رباعي دائري





✍ (٣) فى الشكل المقابل :

اثبت أن : القطع المستقيمة العمودية على أضلاع المثلث من الرؤوس المقابلة تتقاطع فى نقطة واحدة .

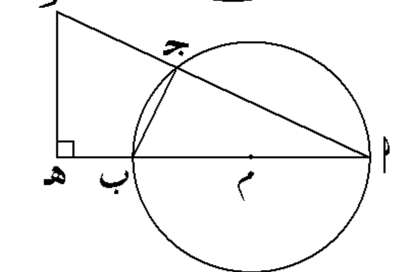


✍ (٥) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ تمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب

، ق (أ) = ٤٥° اثبت أن :

❶ الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى . ❷ المثلث م جـ ء متساوى الساقين .

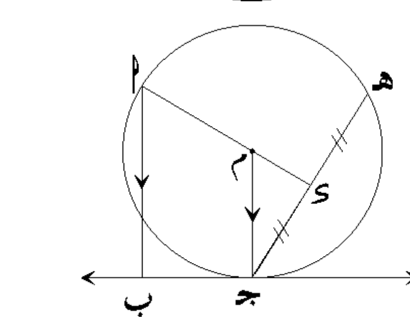


✍ (٦) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، رسمت أ جـ تمس الدائرة فى أ

، ثم رسمت ب جـ فقطعت الدائرة فى ء ثم نصفت ب ء فى هـ

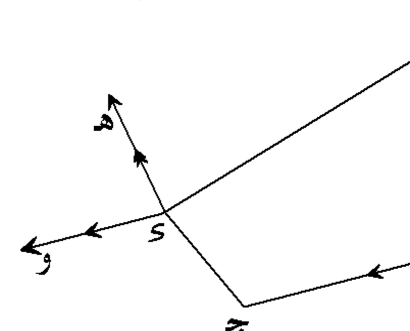
اثبت أن : الشكل م أ جـ هـ رباعى دائرى .



✍ (٧) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى دائرة م ، ء ∈ أ جـ رسم ء هـ ⊥ أ ب

اثبت أن : الشكل ب هـ ء جـ رباعى دائرى .



✍ (٨) فى الشكل المقابل :

م دائرة ، ء منتصف هـ جـ ، ب جـ مماس للدائرة م عند جـ

، أ ب // م جـ اثبت أن :

أ ب جـ ء رباعى دائرى .

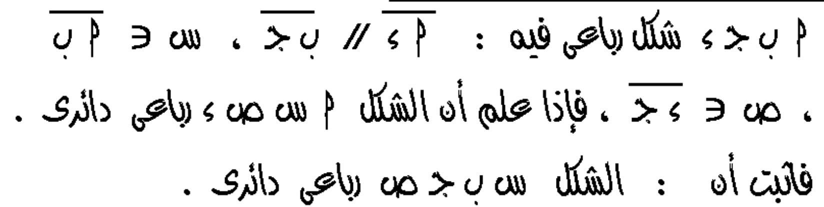
✍ (١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب // ء هـ ، ب جـ // ء و ،

ق (∠ أ ء هـ) + ق (∠ جـ ء و) = ١٨٠

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

[١١] فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ء // ب جـ ، س ∈ أ ب
، ص ∈ ء جـ ، فإذا علم أن الشكل أ س ص ء رباعى دائرى .
فاثبت أن : الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى .

[١٣] فى الشكل المقابل :

ب جـ قطر فى دائرة م ،
اثبت أن : الشكل ل م ب ء رباعى دائرى .

[١٤]

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ وتر فيها ، ء منتصف أ جـ ، رسم م ء فقطع الدائرة فى هـ ، ورسم ب و ⊥ أ ب فقطع أ جـ فى و اثبت أن :

❶ الشكل م ب و ء رباعى دائرى .
❷ ق(∠ و) = ٢ ق(∠ ب أ هـ)

[١٥]

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، جـ ∈ ب أ ، جـ ∉ أ ب ، رسم جـ س فقطع الدائرة م فى س ، ص فاذا كانت ء منتصف س ص ، أ ب ∩ م ن = { ع }
اثبت أن : الشكل جـ ء م ع رباعى دائرى .

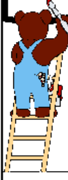
[١٦] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، رسمت دائرة مر بالنقطتين أ ، ب
فقطعت أ ء فى هـ ، ب جـ فى و
اثبت أن : الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى .

[١٧] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، س منتصف ء جـ ، ق(∠ أ ص س) = ٧٠°

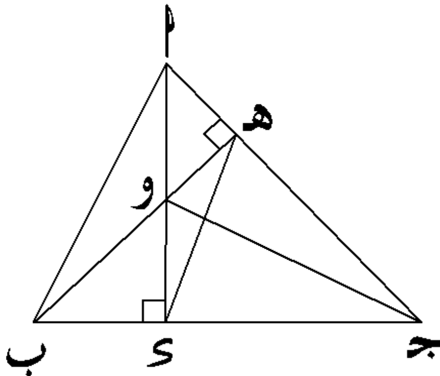
❶ اثبت أن : الشكل س ص هـ ب رباعى دائرى
❷ أوجد : ق(∠ أ ء هـ)



[١٨] أ ب جـ ء شكل رباعي دائرى مرسوم داخل دائرة ى، و ∈ $\overline{أ ب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{و هـ}$ // $\overline{ب جـ}$
ويقطع $\overline{جـ ء}$ في هـ ، $\overleftrightarrow{ء و}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ ب}$ = { س }
اثبت أن : ❶ الشكل أ و هـ ء رباعي دائرى ❷ ق(∠ ب س و) = ق(∠ هـ أ ء)

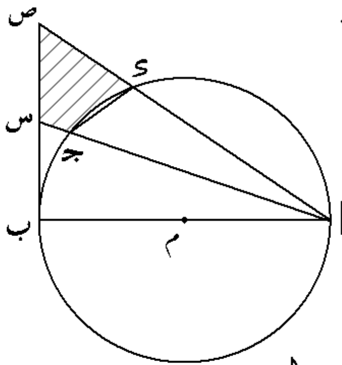
[١٩] أ ب جـ مثلث ، رسمت دائرة قطرها $\overline{ب جـ}$ وتقطع $\overline{أ ب}$ في نقطة ء ، $\overline{أ جـ}$ في نقطة هـ
، فإذا كان : $\overline{ب هـ}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { و }
اثبت أن : ❶ أ ء و هـ رباعي دائرى ❷ ق(∠ ء أ و) = ق (∠ ب جـ ء)

[٢٠] أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب > أ جـ ، ء ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث أ جـ = أ ء
، $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف (∠ أ) ويقطع $\overline{ب جـ}$ في هـ ويقطع الدائرة في و
اثبت أن : الشكل ب ء هـ و رباعي دائرى

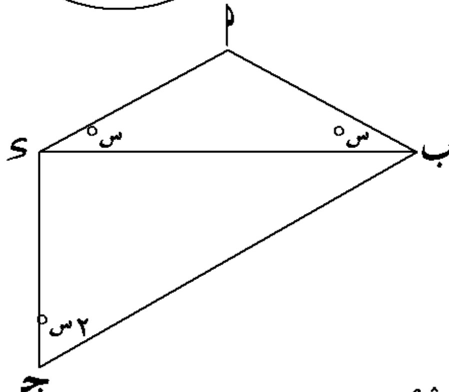


[٢١] في الشكل المقابل :
أ ب جـ Δ فيه : $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$
، $\overline{أ ء}$ ∩ $\overline{ب هـ}$ = { و }
اثبت أن : ق(∠ هـ جـ و) = ق(∠ هـ ب أ)

[٢٢] أ ب جـ Δ ، رسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ قطعه في ء ، ثم رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ قطعه في هـ
، $\overleftrightarrow{ء و}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ قطعه في و اثبت أن : الشكل هـ ب جـ و رباعي دائرى



[٢٣] في الشكل المقابل :
$\overline{أ ب}$ قطرة في دائرة م ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ء}$ وتران فيها وفي جهة واحدة من $\overline{أ ب}$
، رسم من ب مماس للدائرة قطع $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في س ، وقطع $\overleftrightarrow{أ ء}$ في ص
اثبت أن : الشكل س ص ء جـ رباعي دائرة .



[٢٤] في الشكل المقابل :
ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) = س°
، ق(∠ جـ) = ٢س°
اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى



(٢٥) فى الشكل المقابل :

ﻢ ب جـ ء رباعى دائرى ، ق(∠ ﻢ) = ٧ س° ، ق(∠ ب) = (٤ س − ٣٠)°

، ق(∠ جـ)= ٢س° ، ق(∠ ء) = (٥ س + ٣٠)°

اثبت أن : الشكل ﻢ ب جـ ء رباعى دائرى

(٢٦) ﻢ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق(∠ ﻢ) = ٩٠° ، أطوال أضلاعه $\overline{ﻢب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـء}$ ، $\overline{ﻢء}$

على الترتيب ٨سم ، ٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ٥سم ، ٦سم

اثبت أن : الشكل رباعى دائرى وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه وطول نصف قطرها .

(٢٧) $\overline{ﻢب}$ وتر فى الدائرة م ، جـ منتصف $\widehat{ﻢب}$ ، رسم من جـ الشعاعان $\overleftarrow{جـس}$ ، $\overleftarrow{جـص}$

فقطعا $\overline{ﻢب}$ ، س ، ص على الترتيب وقطعا الدائرة فى ل ، ع على الترتيب

اثبت أن : س ص ع ل رباعى دائرى

(٢٨) فى الشكل المقابل :

ﻢ ب جـ ء شكل رباعى ، جـ ∈ $\overline{هـب}$ ، Δ ء جـ هـ ~ Δ ب ﻢ ء

اثبت أن : الشكل ﻢ ب جـ ء رباعى دائرى . $\overline{هـء}$ // $\overline{جـﻢ}$

(٢٩)

$\overline{ﻢب}$ قطر فى دائرة ، ل مستقيم يمس الدائرة عند ب ، فرضت النقطتان جـ ، ء على الدائرة فى جهتين

مختلفتين من $\overline{ﻢب}$ ثم رسم $\overleftarrow{ﻢجـ}$ ، $\overleftarrow{ﻢء}$ فقطعا المستقيم ل فى هـ ، و على الترتيب

اثبت أن : الشكل جـ ء و هـ رباعى دائرى .

(٣٠) فى الشكل المقابل :

ﻢ ب جـ Δ فيه : $\overline{ﻢء}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ ، $\overline{بهـ}$ ⊥ $\overline{ﻢجـ}$ ، $\overline{جـو}$ ⊥ $\overline{ﻢب}$

اثبت أن : ق(∠ هـ ء و) = ١٨٠° − ٢ ق(∠ ﻢ)

(٣٣) فى الشكل المقابل :

$\overline{بجـ}$ قطر فى الدائرة م ، ﻢ ب = ﻢ جـ

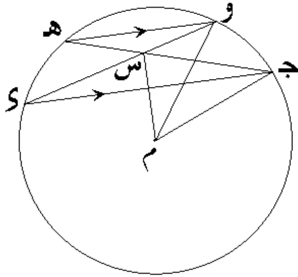
برهن أن الشكل م ء ﻢ ب رباعى دائرى



[٣٤] $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، جـ نقطة خارج الدائرة ، رسم $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

حيث $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ يقطعه في ء رسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ليقطع الدائرة في هـ، اثبت أن :

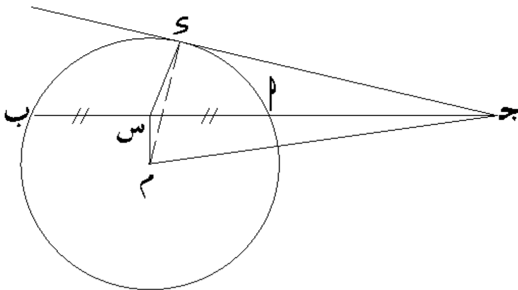
① الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائري ② إذا كانت ق(∠ هـ جـ ء) = ٣٠° أوجد ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$)



[٣٥] في الشكل المقابل :

$\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$ ، $\overline{\text{و ء}}$ ∩ $\overline{\text{جـ هـ}}$ = { س }

اثبت أن : و جـ م س رباعي دائري

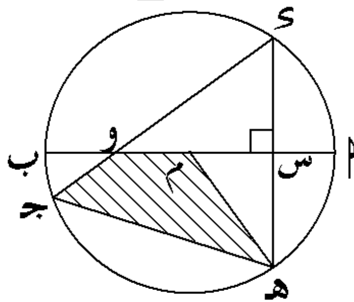


[٣٦] في الشكل المقابل :

$\overline{\text{جـ ء}}$ قطعة مماسية للدائرة عند ء ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

اثبت أن : الشكل م س ء جـ رباعي دائري

(إرشاد : ارسم $\overline{\text{ء م}}$)

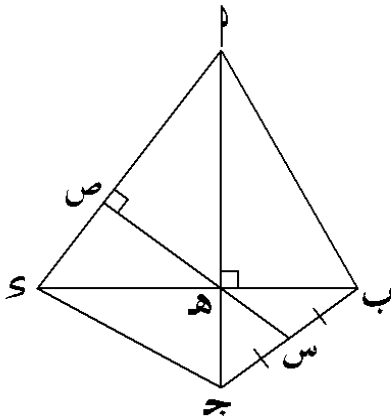


[٣٧] في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

، ء هـ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = { س }

اثبت أن : الشكل م هـ جـ و رباعي دائري

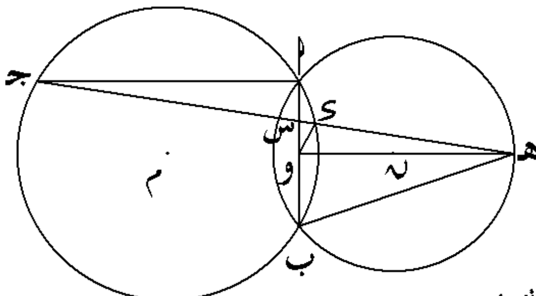


[٣٨] في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ حيث $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = { هـ }

، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ يقطعه في ص

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري



[٣٩] في الشكل المقابل :

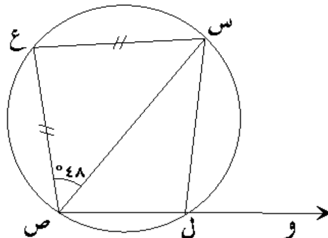
الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

، $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{هـ جـ}}$ = { س }

، $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

اثبت أن : الشكل هـ ب و ء رباعي دائري

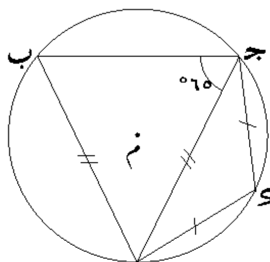




✍ [٤] فى الشكل المقابل :

ع س = ع ص ، ق(∠ س ص ع) = ٤٨°

أوجد : ق(∠ س ل و)

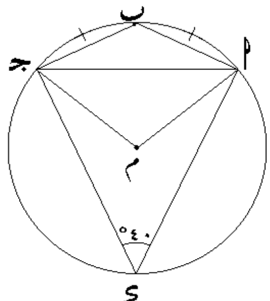


✍ [٥] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، أ ب = أ جـ ، أ ء = ء جـ ، ق(∠ أ جـ ب) = ٦٥°

أوجد : ق(∠ ء أ جـ)

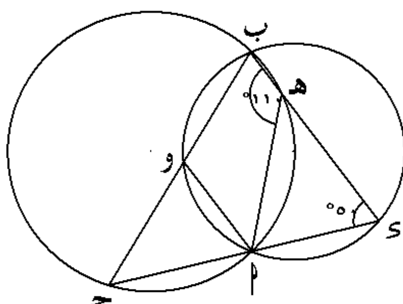


✍ [٦] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، ق(∠ ب) = ٧٠° ، ق(∠ ء جـ و) = ١١٠°

أثبت أن $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

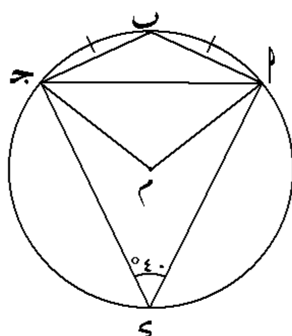


✍ [٧] فى الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

ق(∠ ب هـ أ) = ١١٠° ، ق(∠ ء) = ٥٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ و ب) ❷ ق(∠ جـ)

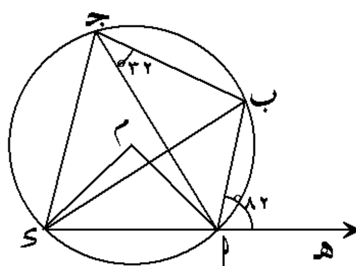


✍ [٨] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ، ب منتصف $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

، ق(∠ ء) = ٤٠° أوجد ❶ ق(∠ أ م جـ)

❷ ق(∠ أ ب جـ) ❸ ق(∠ ب أ جـ)

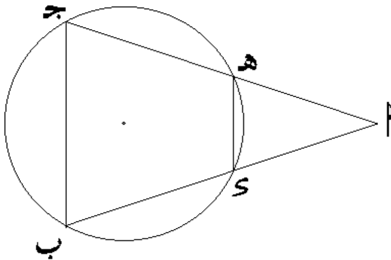


✍ [٩] فى الشكل المقابل :

دائرة م ، ق(∠ هـ أ ب) = ٨٢° ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٢°

أوجد ❶ ق(∠ أ جـ ء) ❷ ق(∠ أ م ء)

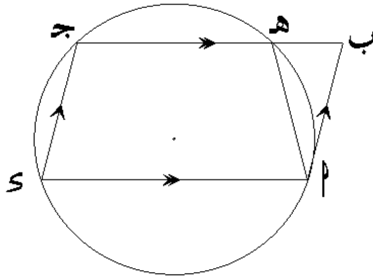
، ❸ ق(∠ أ ب ء)



(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ

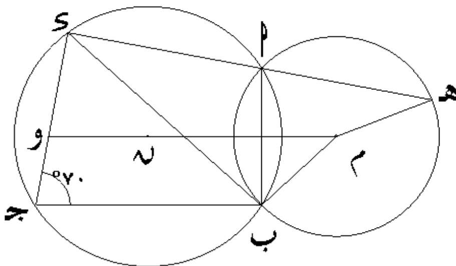
أثبت أن : ء هـ // ب جـ



(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، ب جـ يقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : أ ب = أ هـ

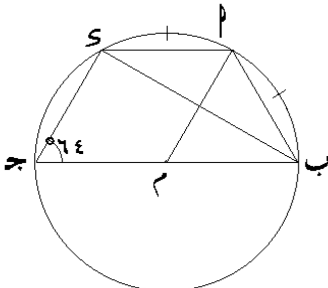


(١٢) فى الشكل المقابل :

ق (∠ جـ) = ٧٠° ، طول جـ ء⌒ = طول ب جـ⌒

أوجد بالبرهان ❶ ق (∠ ب ء جـ) ❷ ق (∠ ب م هـ)

❸ ق (∠ ب أ ء)

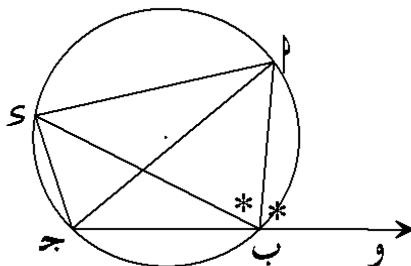


(١٣) فى الشكل المقابل :

ب جـ قطر فى دائرة م ، أ منتصف ب ء⌒ ، ق (∠ جـ) = ٦٤°

أوجد : ❶ ق (∠ أ م ب) ❷ ق (∠ أ)

❸ ق (∠ ء ب جـ)

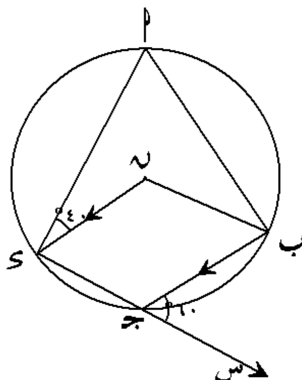


(١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م

، أ ب ينصف ∠ ء ب و

أثبت أن : أ ء = أ جـ



(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ن ، ن ء // ب جـ

، ق (∠ ب جـ س) = ٦٠° ، ق (∠ ن ء أ) = ٤٠°

❶ أثبت أن : الشكل ن ء جـ ب معين

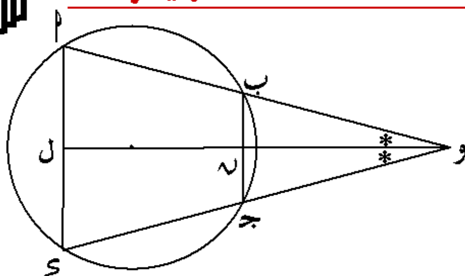
❷ أوجد : ق (∠ أ ب ن)

✍ [١٧] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، $\overline{\text{و ل}}$ ينصف ∠ أ و ء

أثبت أن : ق(∠ جـ ن ل) = ق(∠ ء ل ن)

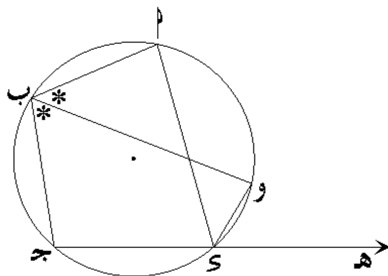


✍ [١٨] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، $\overline{\text{ب و}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

أثبت أن : $\overline{\text{ء و}}$ ينصف ∠ أ ء هـ

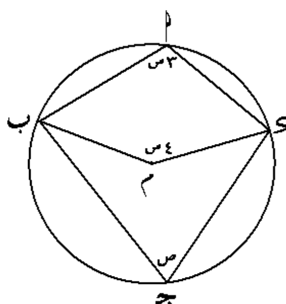


✍ [١٩] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، ق(∠ أ) = ٣س ، ق(∠ ء م ب) = ٤س°

، ق(∠ ء جـ ب) = ص° أوجد قيمة س ، ص

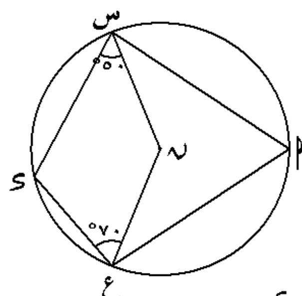


✍ [٢٠] فى الشكل المقابل :

دائرة ن ، ق(∠ن س ء) = ٥٠°

، ق(∠ن ع ء) = ٧٠°

أوجد : ق(∠ أ)

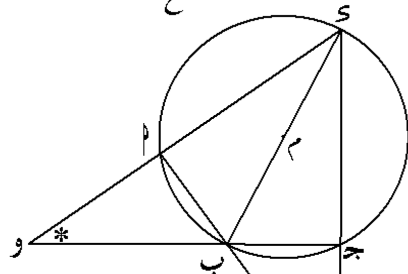


✍ [٢١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، ق(∠ هـ) = ق(∠ و)

أثبت أن : ❶ ق(∠ و أ ب) = ق(∠ هـ جـ ب)

❷ $\overline{\text{ء ب}}$ قطر للدائرة

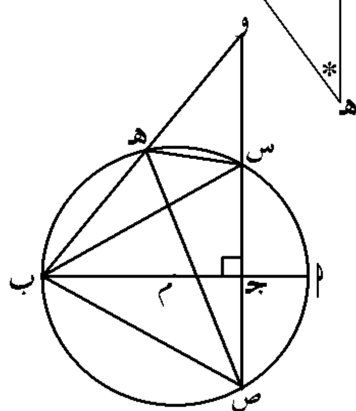


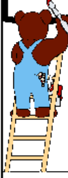
✍ [٢٢] فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ يقطعه فى جـ

أثبت أن : ❶ ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ب ص س)

❷ ق(∠ و هـ س) = ق(∠ ص هـ ب)





تمارين على اثبات ان الشكل رباعي دائري

(١) اكمل ما يأتي

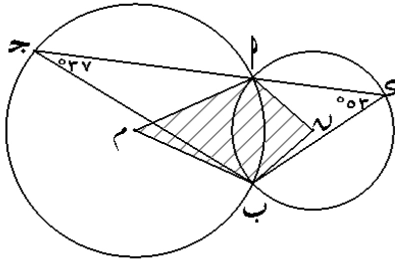
١ يكون الشكل رباعي دائريا فى الحالات الآتية .... ، .... ، ....

٢ إذا كان الشكل ﻫ ب جـ ء رباعيا دائريا و كان ق (∠ ﻫ) = ٧٠° فان ق (∠ جـ) = ...°

٣ من الأشكال الرباعية الدائرية .... ، .... ، ....

٤ فى أى شكل رباعى إذا كان مجموع قياس زاويتين متقابلتين فيه = ١٨٠° كان الشكل ....

(٢) فى الشكل المقابل :

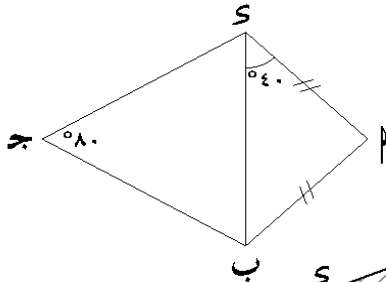


الدائرة م ∩ الدائرة ن = { ﻫ ، ب }

، ق (∠ ﻫ ء ب) = ٥٣° ، ق (∠ ﻫ جـ ب) = ٣٧°

أثبت ان : الشكل ﻫ ن ب م رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل :

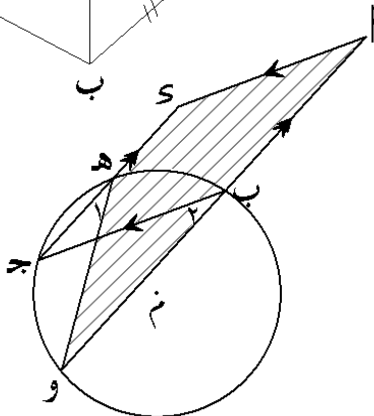


ﻫ ب = ﻫ ء ، ق (∠ ﻫ ء ب) = ٤٠°

، ق (∠ جـ) = ٨٠°

اثبت أن : الشكل ﻫ ب جـ ء رباعى دائرى

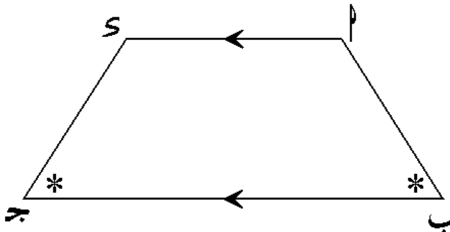
(٤) فى الشكل المقابل :



ﻫ ب جـ ء متوازى أضلاع

اثبت أن : الشكل ﻫ و هـ ء رباعى دائرى

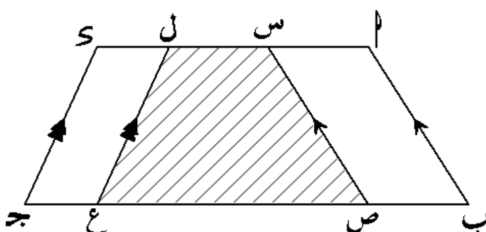
(٥) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ﻫ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

اثبت أن : الشكل ﻫ ب جـ ء رباعى دائرى .

(٦) فى الشكل المقابل :



ﻫ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، $\overline{\text{ﻫ ب}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ل ع}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$

اثبت أن : الشكل س ص ع ل رباعى دائرى .

(٧) فى الشكل المقابل :

س منتصف $\overline{ب جـ}$ ، ص منتصف $\overline{ء جـ}$ ،

أثبت ان : ❶ الشكل م س جـ ص رباعى دائرى

❷ ق (∠ س م ص) = ق (∠ ب ٲ ء)

(٨) فى الشكل المقابل :

ٲ ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{ٲ جـ}$ يقطعه فى هـ

، س منتصف $\overline{ٲ ب}$ ، ٲ ء = ب ء أثبت أن :

❶ الشكل ء س ب هـ رباعى دائرى ❷ق (∠ س هـ ء) = ق (∠ ٲ)

(٩) فى الشكل المقابل :

ٲ ب جـ ء شكل رباعى فيه $\overline{ٲ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، س ∈ $\overline{ٲ ب}$ ،

ص ∈ $\overline{ء جـ}$ فإذا كان الشكل ٲ س ص ء رباعى دائرى

أثبت أن : الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى

(١٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{ٲ ب}$ ، $\overline{ٲ جـ}$ وتران فى الدائرة م ،

س منتصف $\overline{ٲ ب}$ ، $\overline{ٲ جـ}$ // $\overline{س ص}$

أثبت أن : الشكل م س ب ص رباعى دائرى .

(١١) فى الشكل المقابل :

ٲ ب جـ ء متوازى أضلاع

، هـ ∈ $\overline{ٲ ء}$ حيث ٲ ب = ب هـ

أثبت أن : الشكل هـ ب جـ ء رباعى دائرى

(١٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{ٲ ب}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{ٲ جـ}$ وترا فيها، هـ منتصف $\overline{ٲ جـ}$،رسم $\overleftarrow{ب ء}$ مماسا

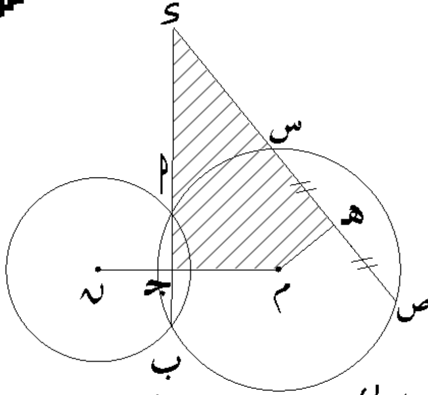
للدائرة فقطع $\overrightarrow{ٲ جـ}$ فى ء ، ورسم $\overleftarrow{هـ م}$ فقطع الدائرة فى س

أثبت أن : ❶ الشكل م هـ ء ب رباعى دائرى

❷ ق (∠ ء) =٢ ق (∠ س ٲ ب)



(١٣) فى الشكل المقابل :

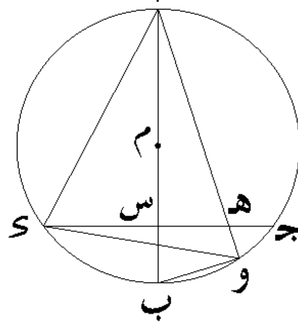


الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، ء ∈ ب أ

، هـ منتصف س ص

اثبت أن : الشكل ء هـ م جـ رباعيا دائريا

(١٤) فى الشكل المقابل :



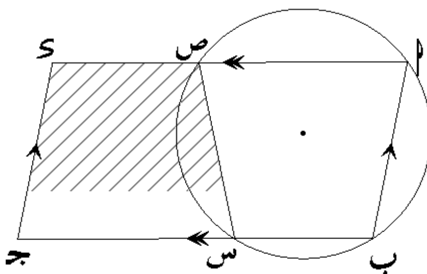
جـ ء وترا فى الدائرة م ، س منتصف جـ ء ، م س يقطع الدائرة فى أ ، ب

، هـ ∈ جـ س ، أ هـ يقطع الدائرة فى و اثبت أن :

❶ الشكل هـ و ب س رباعى دائرى

❷ ق (∠ أ هـ س) = ق (∠ أ ء و)

(١٨) فى الشكل المقابل :

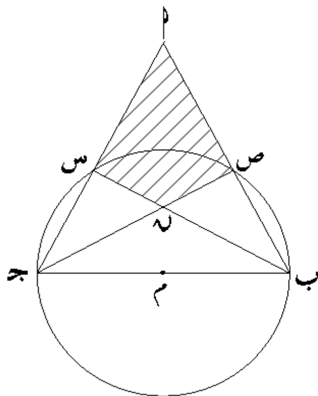


أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، أ ء يقطع الدائرة فى ص

، ب جـ يقطع الدائرة فى س

اثبت أن : الشكل ص س جـ ء رباعى دائرى

(١٩) فى الشكل المقابل :



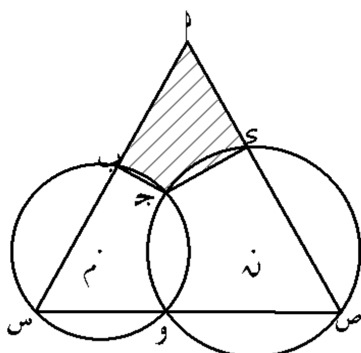
ب جـ قطر فى الدائرة م ، أ نقطة خارج الدائرة

، رسم أ ب فقطع الدائرة فى ص ، رسم أ جـ فقطع الدائرة فى س

اثبت أن : ❶ الشكل أ ص ن س رباعى دائرى

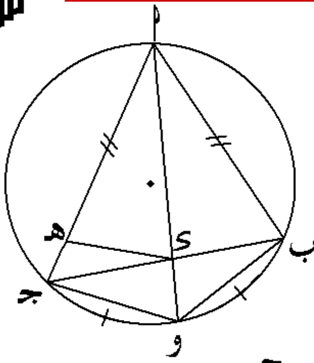
❷ ق (∠ س أ ن) = ق (∠ س ب جـ)

(٢٠) فى الشكل المقابل :



الدائرة م ∩ الدائرة ن = { جـ ، و }

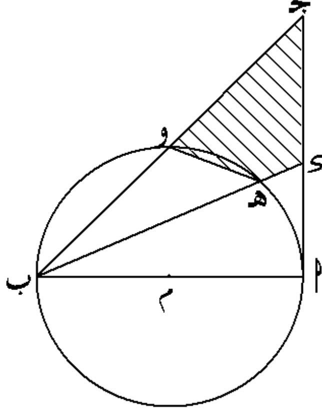
اثبت أن : أ ء جـ ب رباعى دائرى



✍ (٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ هـ ، ق(ب و ⌢) = ق(و جـ ⌢)

اثبت أن : الشكل ى و جـ هـ رباعى دائرى

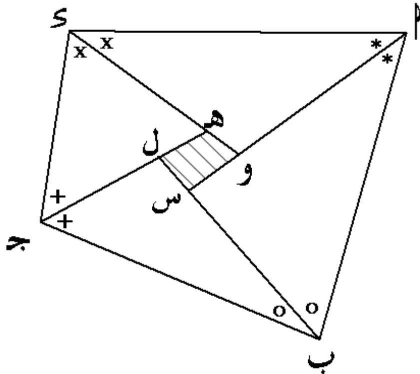


✍ (٢٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ جـ}$ مماس للدائرة م عند أ

، ى ∈ $\overline{أ جـ}$ ، رسم $\overline{ى ب}$ فقطع الدائرة فى هـ ، و ∈ $\overline{ب جـ}$

اثبت أن : الشكل جـ ى هـ و رباعى دائرى



✍ (٢٣) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ى شكل رباعى فيه $\overline{أ و}$ ، $\overline{ى و}$ ، $\overline{ب س}$ ، $\overline{جـ هـ}$

ينصفان كل من ∠ أ ، ∠ ى ، ∠ ب ، ∠ جـ

اثبت أن : الشكل و س ل هـ رباعى دائرى



الوحدة الخامسة

١ التماس فى الدائرة

٢ نظرية العلاقة بين مماسات الدائرة

٣ نظرية الزاوية المماسية

٤ عكس نظرية الزاوية المماسية

تمارين على التماس

(١) اكمل ما يأتى

١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة يكونان ....

٢ المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى الدائرة يكونان ....

٣ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة يكونان ....

٤ الدائرة الداخلة للمثلث هى الدائرة التى ....

٥ مركز الدائرة الداخلة للمثلث هوى نقطة تلاقى ....

٦ إذا كانت : $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتين مماستين للدائرة م عند ب ، جـ فان: $\overleftrightarrow{أم}$ محور تماثل ....

٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الدخل = ...

٨ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = ...

٩ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين = ...

١٠ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين = ...

١١ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدتى المركز = ...

١٢ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين = ...

١٣ عدد المماسات المشتركة الداخلية للدائرتين المتقاطعتين = ...

١٤ المستقيم المار بمركز الدائرة ، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محور تماثل ....

١٥ المستقيم المار بمركز الدائرة ، ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف .... ، كما ينصف ....

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان عند نقطتى ب ، جـ لدائرة طول نصف قطرها ٢سم

فإذا كان طول أ ب = ٥سم فان : طول $\overline{أجـ}$ = ... سم

(١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٥ (٤) ٨

٢ فى الشكل المقابل : $\overleftarrow{س ص}$ ، $\overleftarrow{س ع}$ مماسان للدائرة عند ص ، ع

، ق (ل ص ع) = ١٣٠° فان : ق (س) = ...

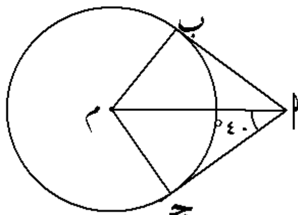
(١) ٥٠° (٢) ٦٥° (٣) ٨٠° (٤) ١٠٠°

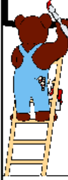
ع
س
١٣٠°
ص
ل

٣ فى الشكل المقابل : إذا كانت : $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق(م أ جـ) = ٤٠° فان : ق(جـ أ ب) = ...

(١) ٨٠° (٢) ٥٠° (٣) ٤٠° (٤) ٢٠°





❹ 📖 فى الشكل المقابل : إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسين للدائرة م

، ق(جـ ب م) = ٢٥° فان : ق(ب أ جـ) = ...

(١) ٧٥°   (٢) ٥٠°   (٣) ٢٥°   (٤) ١٢° ٣٠َ

❺ فى الشكل المقابل :

$\overline{جـ ب}$ ، $\overline{جـ أ}$ مماستان للدائرة م ، جـ ب = ب أ فان ق(∠ جـ) = ...

(١) ٦٠°   (٢) ١٢٠°   (٣) ٩٠°   (٤) غير ذلك

❻ فى الشكل المقابل :

الدائرة م مماسه لأضلاع المثلث أ ب جـ فإذا كان : أ ء = ٨سم

، ب هـ = ٦سم ، جـ و = ٧سم فان محيط Δ أ ب جـ = ...

(١) ٢١سم   (٢) ٤٢سم   (٣) ٤٨سم   (٤) ٢٨سم

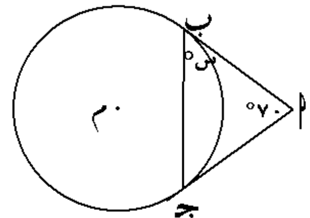
❼ فى الشكل المقابل :

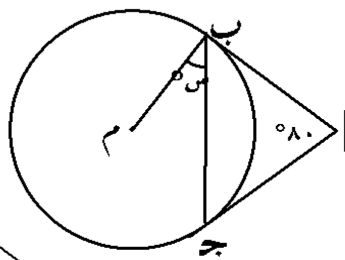
إذا كانت م هى مركز الدائرة الداخلة Δ أ ب جـ ، ق(∠ أ ب جـ) = ٨٠°

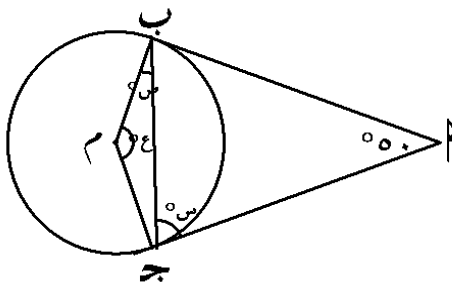
فان : ق(جـ ب م) = ...

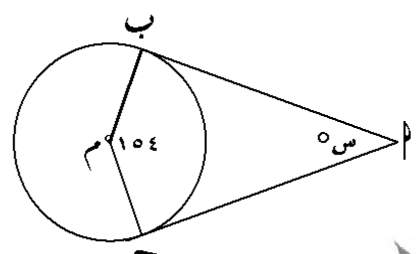
(١) ٤٠°   (٢) ٨٠°   (٣) ١٠٠°   (٤) ٢٠°

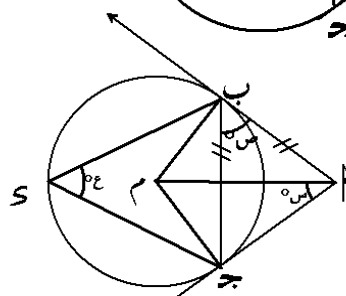
[٣] فى كل من الأشكال الآتية $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، اوجد قيمة س

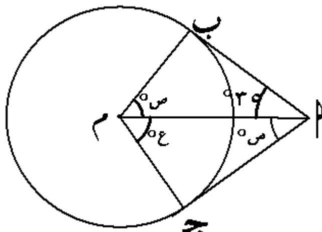












✍ (٤) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ‾أ ب ، ‾أ جـ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق(∠ م ب جـ) = ٣٠°

اثبت أن : Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع .

✍ (٥) فى الشكل المقابل :

‾أ ب ، ‾أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٥ احسب ق(∠ أ)

✍ (٦) فى الشكل المقابل :

‾أ ب ، ‾أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

رسم ‾ب ء قطرا فى الدائرة اثبت أن ‾أ م // ‾جـ ء

✍ (٧) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ،

‾ب جـ مماس مشترك للدائرتين عند ب ، جـ على الترتيب

اثبت أن ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠°

ارشاد (ارسم مماس مشترك عند أ يقطع ‾ب جـ فى النقطة ء)

✍ (٨) 📖 م ، ن متماستان من الداخل فى ب ، ⟷أ ب مماس للدائرتين ، رسم ⟷أ ء مماسا للدائرة م عند ء ، ورسم ⟷أ جـ مماسا للدائرة ن عند جـ **اثبت أن** : أ ء = أ جـ

✍ (٩) 📖 ‾أ ب ، ‾أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ فاذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى ١٠ سم ، ق(∠ ب أ جـ) = ٦٠° **فأوجد طول كل من** : ❶ ‾م أ ❷ ‾أ ب

[١٠] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠ ب أ م) = ٢٥°

، هـ ∈ $\overset{\frown}{بجـ}$ الأكبر

أوجد : ❶ ق(∠ أ جـ ب) ❷ ق(∠ ب هـ جـ)

[١٢] فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{سأ}$ ، $\overleftarrow{سب}$ مماستان للدائرة عند أ ، ب

، ق(∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق(∠ ء جـ ب) = ١٢٥°

اثبت أن : ❶ $\overleftarrow{أب}$ ينصف (∠ ء أ س)

❷ $\overleftarrow{أء}$ // $\overleftarrow{سب}$

[١٣] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$ ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

اثبت أن :❶ $\overleftarrow{جـب}$ ينصف أ جـ ء ❷ أوجد : ق(∠ أ)

[١٤] فى الشكل المقابل :

△ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج فى س ، ص ، ع ،

فإذا كان محيط △ أ ب جـ = ١٨سم ، أ س = ٢سم ، جـ ع = ٣سم

احسب طول : $\overline{ب ص}$

[١٥] فى الشكل المقابل :

إذا كانت الدائرة م الداخلة △ أ ب جـ تمس

أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ}$ فى ء ، هـ ، و على الترتيب

، وكان ق(∠ ء م و) = ١٢٠° ، ق(∠ هـ جـ م) = ٢٠°

فأوجد قياسات زوايا △ أ ب جـ

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

(١٧) فى الشكل المقابل :

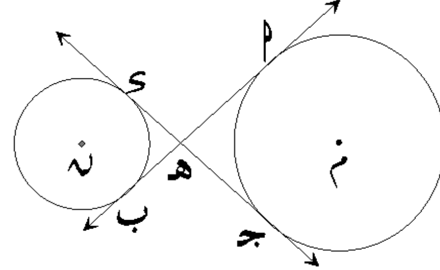
الدائرة م انقسمت الى ثلاثة أقواس متساوية فى الطول

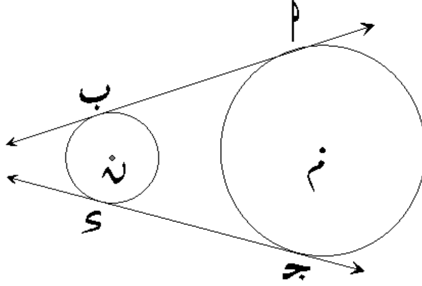
، ءأ ، ءجـ يمسانها من ء أوجد : ق (∠ أ م ب) اثبت أن :

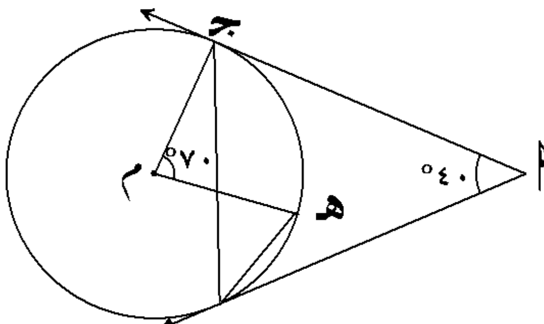
❶ الشكل أ م جـ ء رباعى دائرى . ❷ Δ أ جـ ء متساوى الأضلاع .

(١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء مماسان للدائرتين م ، ن اثبت أن : أ ب = جـ ء





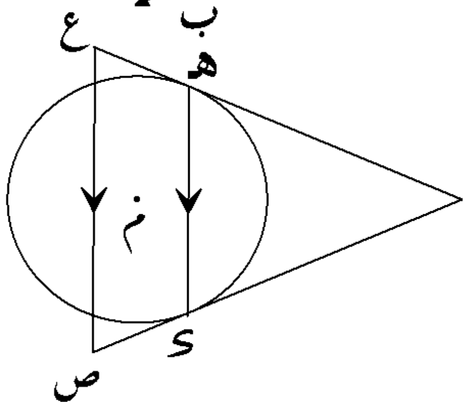


(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ يمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب

، ق (∠ ب أ جـ) = ٤٠° ، ق (∠ هـ م جـ) = ٧٠°

اثبت أن : ب هـ ينصف (∠ أ ب جـ)

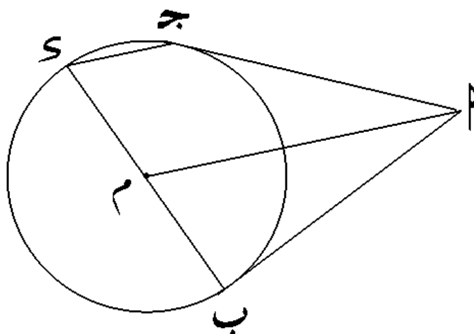


(٢٠) فى الشكل المقابل :

س ص ع Δ ، س ص ، س ع تمسان الدائرة م عند ء ، هـ

، فإذا كان : ء هـ // ص ع

اثبت أن : الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى .

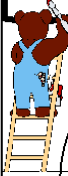


(٢٢) فى الشكل المقابل :

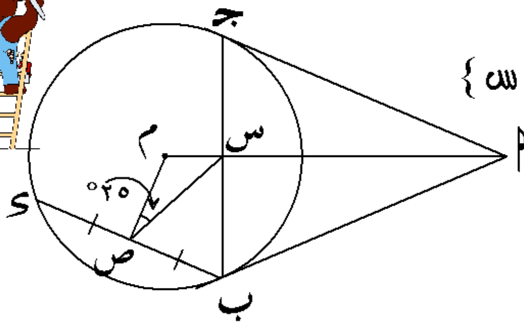
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

، ب ء قطر فى الدائرة

اثبت أن : أ م // جـ ء



(٢٤) فى الشكل المقابل :



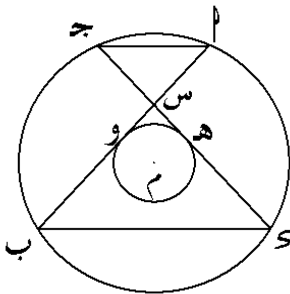
$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ ، $\overline{أم}$ ∩ $\overline{ب جـ}$ = { س }

، ص منتصف $\overline{ب ء}$ ، ق(∠ س ص م) = ٢٥ °

❶ اثبت أن : الشكل س ب ص م رباعى دائرى .

❷ أوجد : ق(∠ أ)

(٣٠) فى الشكل المقابل :

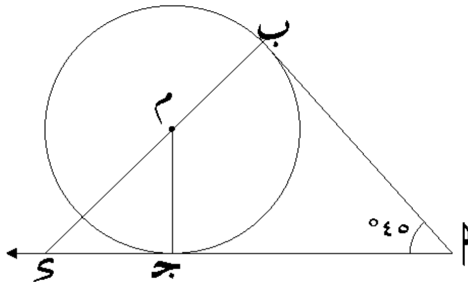


دائرتان متحدتى المركز م . رسم الوتران $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ فى الدائرة الكبرى متقاطعان فى س

و يمسان الدائرة الصغرى فى و ، هـ على الترتيب

اثبت أن ❶ △ س أ جـ متساوي الساقين ، ❷ $\overline{أ جـ}$ // $\overline{ب ء}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ

، ق(∠ أ) = ٤٥ ° ، $\overleftarrow{ب م}$ ∩ $\overleftarrow{أ جـ}$ = { ء }

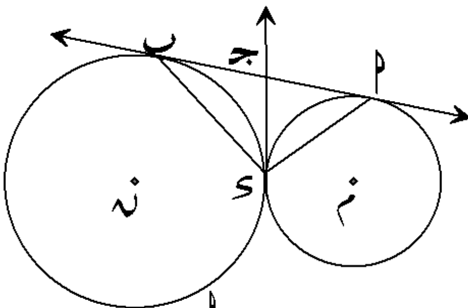
اثبت أن : ❶ الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى ❷ أ ء = أ ب + م ب

(٣٤) 📖 $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، أ ب = ١٠ سم ، جـ ∈ الدائرة م ، رسم مماس للدائرة عند

جـ فقطع المماسين المرسومين لها عند أ ، ب فى س ، ص على الترتيب حيث س ص = ١٣ سم

❶ اثبت أن : $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{م ص}$ ❷ أوجد : مساحة الشكل أ س ص ب

(٣٥) فى الشكل المقابل :

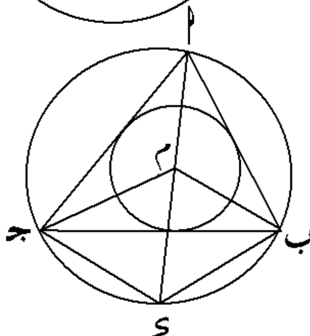


م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ء ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس مشترك

لهما عند أ ، ب ، $\overleftarrow{ء جـ}$ مماس مشترك للدائرتين عند ء

اثبت أن : ❶ جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ❷ $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب ء}$

(٣٩) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ △ رسمت الدائرة الداخلة م

، رسم $\overleftarrow{أ م}$ فقطع الدائرة الخارجة للمثلث فى ء

اثبت أن ء مركز الدائرة الخارجة △ م ب جـ

(٤٠) فى الشكل المقابل :

ٵ ب جـ △ رسمت الدائرة الداخلة م ، ن مركز الدائرة الخارجة △ ٵ ب جـ ،

رسم ٵم فقطع الدائرة الخارجة للمثلث فى ء اثبت أن ن ء ⊥ ب جـ

(٤١) فى الشكل المقابل :

ٵ ب جـ △ رسمت الدائرة م الداخلة تمس أضلاعة ٵ ب ، ٵ جـ ، ب جـ

فى ء ، و ، هـ على الترتيب اثبت أن ٵ ب + جـ هـ = $\frac{1}{2}$ محيط △ ٵ ب جـ

(٤٢) فى الشكل المقابل :

ٵ ب جـ △ قائم الزاوية فى (ب) رسمت الدائرة م الداخلة

تمس أضلاعة ٵ ب ، ٵ جـ ، ب جـ فى ء ، و ، هـ على الترتيب

اثبت أن : ب ء م هـ مربع

(٤٥) فى الشكل المقابل :

ٵ ب جـ △ أطوال أضلاعه ٵ ب ، ب جـ ، ٵ جـ هى على الترتيب

٧سم ، ١٠سم ، ٨سم فإذا كانت الدائرةالداخلة له تمس الأضلاع

السابقة فى ء ، هـ و على الترتيب اثبت أن :

❶ ب جـ + ٵ ء = ٵ جـ + ب ء ❷ طول كل من : ٵ ء ، هـ جـ

(٤٦) 📖 فى الشكل المقابل :

م دائرة داخلة للشكل الرباعى ٵ ب جـ ء

، طول نصف قطرها ٥سم ، ٵ ب = ٩سم ، جـ ء = ١٢سم

اوجد محيط الشكل ٵ ب جـ ء ثم احسب مساحته .

(٤٨) 📖 فى الشكل المقابل :

ٵ ب مماس مشترك للدائرتين م ، ن من الخارج عند ٵ ، ب على الترتيب

، طولا نصفى قطري الدائرتين ١٧سم ، ٨سم على الترتيب

م ن = ٤١سم أوجد طول : ٵ ب

٤١ سم

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



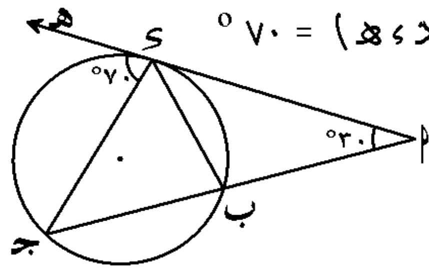
تمارين على الزاوية المماسية

[١] أكمل ما يأتي

❶ قياس الزاوية المماسية يساوى قياس .... المشتركة معها فى القوس .

❷ قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية .... المشتركة معها فى القوس

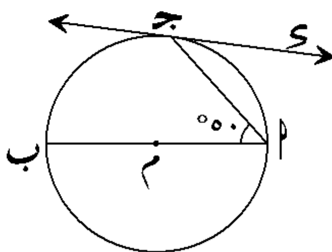
❸ فى الشكل المقابل : إذا كان ↔أهـ يمس الدائرة فى ء ، ق(∠ جـ ء هـ) = ٧٠° ، ق(∠ أ) = ٣٠° ، فان :



(١) ق(∠ ء ب جـ) = ...° (٢) ق(∠ أ ء ب) = ...°

(٣) ق(∠ ب جـ ء) = ...°

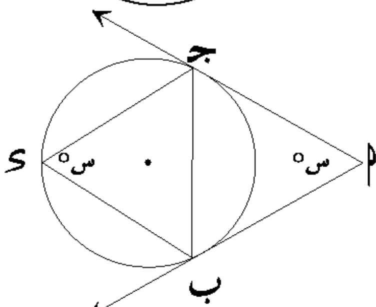
❹ فى الشكل المقابل : إذا كان أب قطرا فى الدائرة م ، ↔ءجـ مماسا لها عند جـ ، ق(∠ أ) = ٥٠°



فان : (١) ق(⌒بجـ) = ...° (٢) ق(⌒أجـ) = ...°

(٣) ق(∠ أ جـ ء) = ...°

❺ فى الشكل المقابل : ↔أب ، ↔أجـ مماسان للدائرة م ، ء نقطة على الدائرة ، فان : قيمة س = ...°

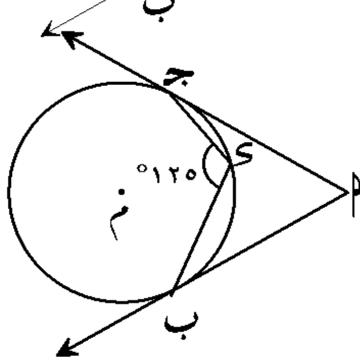


❻ فى الشكل المقابل :

↔أب ، ↔أجـ مماسان للدائرة م ،

ء نقطة على الدائرة بحيث ق(∠ جـ ء ب) = ١٢٥°

فان : ق(∠ أ) = ...°



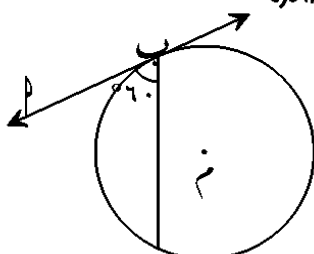
[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كان قياس زاوية مماسية يساوى ٧٠° ، فان قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس يساوى

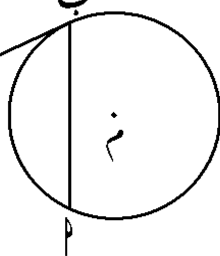
٧٠° ٣٥° ١٤٠° ٢١٠°

❷ فى الشكل المقابل : ↔أب مماس لدائرة مركزها م عند ب ، ب جـ وتر فى الدائرة ، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠° فان : ق(⌒بجـ) = ...

(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ٩٠° (٤) ١٢٠°







❸ فى الشكل المقابل : $\overleftarrow{بى}$ يمس الدائرة ، ق ($\overset{\frown}{أب}$) = $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة

، فان : ق(∠ أ ب ى) = ...

(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ٩٠° (٤) ١٢٠°

❹ فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = أ جـ ، ق(∠ ص أ جـ) = ٥٠°

، فان : ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ...

٥٠° ١٠٠° ٨٠° ١٦٠°

❺ فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{جـ ى}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{م ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ى}$ ،

فان : ق(∠ ب أ ى) = ...

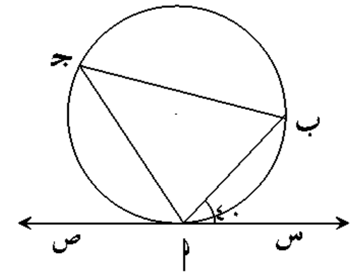
٣٠° ٤٥° ٦٠° ٩٠°

❻ $\overline{ب جـ}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أ ى}$ مماس للدائرة بحيث $\overleftarrow{جـ ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{أ ى}$ = { ى } ،

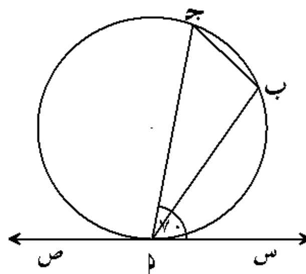
فإذا كان : أ ى = أ جـ فان ق(∠ أ ى جـ) = ...

٦٠° ١٥° ٣٠° ٤٥°

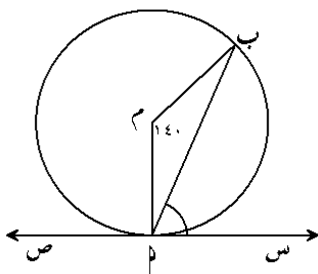
(٣) فى الشكل المقابل :



احسب ق(∠ جـ)



احسب ق(∠ ب)

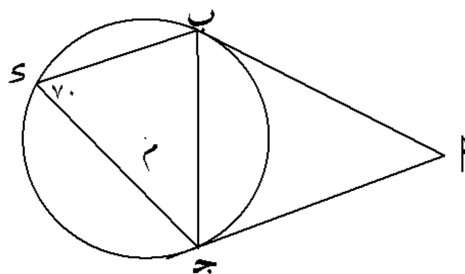


احسب ق(∠ س أ ب)

(٤) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق(∠ ب ى جـ) = ٧٠° أوجد ق(∠ أ)



مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ءهـ مماس للدائرة عند جـ

، ق(∠أب جـ) = ٦٠°

أوجد ق(∠ب جـ هـ)

(٦) فى الشكل المقابل :

س ص مماس للدائرة عند أ

، أب = ب جـ ، ق(∠ س أ ب) = ٤٠°

احسب ق(∠ ء)

(٧) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{هـ أ}$ يمس الدائرة م عند أ

، ق(∠ هـ أ جـ) = ٣٥°

احسب ق(∠ أ هـ جـ)

(٨) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{هـ أ}$ يمس الدائرة م عند أ

، ق(∠ و أ ء) = ٦٠°

اثبت أن ❶ أ جـ = جـ هـ ، ❷ أ هـ = أ ء

(٩) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{و أ}$ يمس الدائرة م عند أ ، $\overleftarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ء

، ق(∠ ب أ و) = ٥٠° ، ق(∠ هـ ء جـ) = ٤٥°

، ق(∠ ب ء جـ) = ٢٠° اوجد قياسات زوايا الشكل أ ب جـ ء

(١٠) 📖 فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠ ب ء جـ) = ٦٥°

أوجد ق(∠ أ)

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماس للدائرة عند ب

، س ∈ $\overline{أ ب}$ ، ص ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث $\overline{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب ء}$

اثبت أن : الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى .

(١٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة ن محيطها ٤٤ سم

، $\overrightarrow{جـ ء}$ مماس لها عند جـ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ // $\overline{ب أ}$

أوجد مع البرهان : ❶ ق(∠ ء جـ أ) ❷ طول $\overset{\frown}{أ جـ}$

(١٣) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ س}$ مماس ، ق(∠ س أ ب) = ٤٠°

، ق(∠ أ ب جـ) = ١١٠°

أوجد : ق(∠ جـ ء ب)

(١٤) فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{س ص}$ ، $\overrightarrow{س ع}$ مماسان للدائرة عند ص ، ع

، ق(∠ ص س ع) = ٨٠° ، ق(∠ هـ ء ع) = ١٣٠°

اثبت أن : ❶ ع هـ = ع ص ❷ $\overline{س ع}$ // $\overline{ص هـ}$

(١٥) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، إذا كان : جـ ب = جـ ء

❶ اثبت أن : ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ ء ب جـ)

❷ إذا كان : ق(∠ جـ هـ ء) = ١١٠° أوجد : ق(∠ أ)

(١٦) فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ يمسان الدائرة عند أ ، ب ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$

، ق(∠ أ ء جـ) = ١٠٠° ، ق(∠ أ جـ ء) = ٥٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ ب جـ) ❷ ق(∠ جـ ب هـ)

❸ ق(∠ أ و ب)

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

(١٧) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمسان الدائرة عند ب ، جـ

، $\overleftrightarrow{أجـ}$ // $\overline{ب ء}$ ، ق(∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ جـ ب) ❷ ق(∠ هـ جـ ء)

❸ اثبت أن : ب جـ = ء جـ

(١٨) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة م ، $\overrightarrow{هـ م}$ يقطع الدائرة فى ب ، جـ

، ق(∠ أ ء جـ) = ١٢٠°

اثبت أن : ❶ أ ب = ب هـ ❷ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ هـ أ جـ)

(١٩) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أجـ}$ قاطع لها ،

ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ،

اثبت أن : ❶ $\overline{أب}$ // $\overline{ء هـ}$

❷ النقط ن ، ء ، جـ ، هـ يمر بها دائرة واحدة .

(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب = أ جـ

، ء ∈ $\overset\frown{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{ء س}$ مماس للدائرة عند ء

اثبت أن : س ص = س ء

(٢١) فى الشكل المقابل :

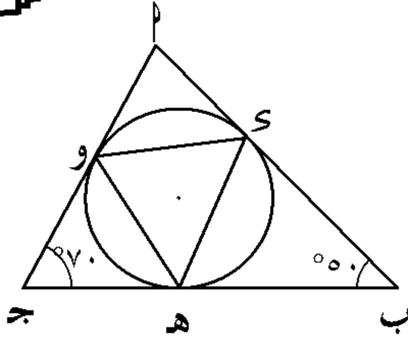
Δ أ ب جـ ، الدائرة الداخلة له تمس أضلاعه

$\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أجـ}$ فى ء ، هـ ، و على الترتيب

فإذا كان : ق(∠ ء هـ و) = ٦٠° ، ق(∠ هـ و ء) = ٧٠°

فأوجد قياسات زواياه Δ أ ب جـ

✍ (٢٢) فى الشكل المقابل :

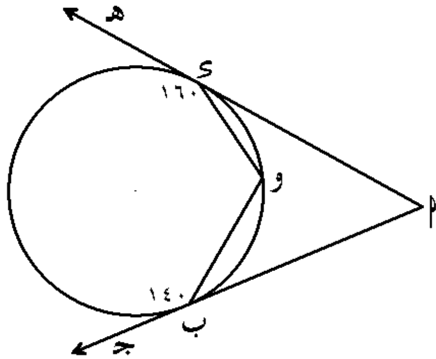


أ ب جـ △ رسمت الدائرة م الداخلة تمس أضلاعه أ ب ، أ جـ ، ب جـ

فى ء ، و ، هـ على الترتيب بحيث ق (∠ ب) = ٥٠°

، ق (∠ جـ) = ٧٠° احسب قياسات زوايا △ ء و هـ

✍ (٢٣) فى الشكل المقابل :

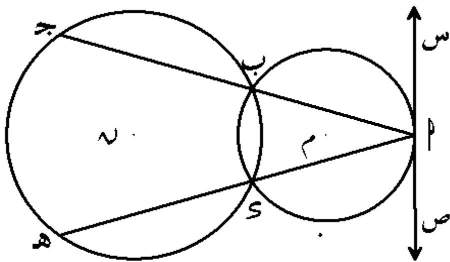


أ جـ ، أ هـ مماسان يمسان الدائرة م فى ب ، ء على الترتيب

وكانت و ∈ ب ء بحيث ق (∠ جـ ب و) = ١٤٠°

، ق (∠ هـ ء و) = ١٦٠° احسب ق (∠ ب و ء) ، ق (∠ ب أ ء)

✍ (٢٤) فى الشكل المقابل :

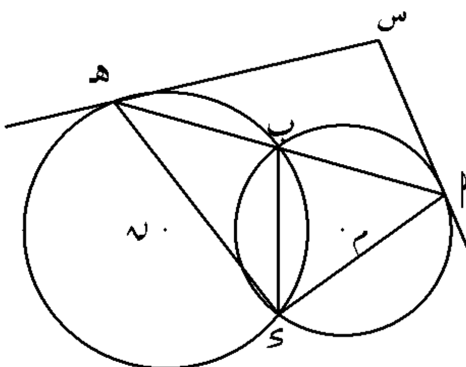


دائرتان م ، ن متقاطعتان فى ب ، ء رسم أ ب يقطع الدائرة ن فى جـ ،

رسم أ ء يقطع الدائرة ن فى هـ فاذا كان أ جـ = أ هـ

اثبت أن أ ب = أ ء

✍ (٢٥) فى الشكل المقابل :

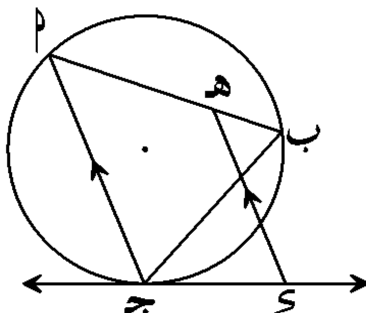


دائرتان م ، ن متقاطعتان فى ب ، ء رسم أ ب يقطع الدائرة ن فى هـ ،

رسم المماسان أ س ، هـ س يتقاطعان فى س

اثبت أن الشكل هـ س أ ء رباعى دائرى

✍ (٢٦) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ △ مرسوم دخل دائرة ، جـ ء مماس للدائرة عند جـ

، رسم ء هـ // أ جـ قطع أ ب فى هـ

اثبت أن : ب هـ جـ ء شكل رباعى دائرى .

(٢٧) في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر في نصف دائرة ، $\overleftarrow{جـ و}$ مماس لها عند جـ ، $\overleftarrow{ء و} \perp \overline{أ ب}$

اثبت أن : ❶ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

❷ Δ و جـ هـ متساوي الساقين

❸ عين مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل أ ء هـ جـ

(٢٨) في الشكل المقابل :

هـ جـ قطعة مماسه للدائرة م عند جـ ، س منتصف $\overline{أ ب}$

اثبت أن : ❶ الشكل هـ جـ م س رباعي دائري

❷ ق(∠ هـ م س) = ق(∠ جـ ب ء)

(٢٩) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م عند أ

، $\overline{ب جـ}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{ب ء} \perp \overleftrightarrow{أ ء}$

اثبت أن : ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ب جـ)

(٣٠) 📖 في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الداخل في أ ،

$\overleftrightarrow{أ س}$ مماس مشترك لهما عند أ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ يقطعان الدائرة الصغرى

في ب ، ء ويقطعان الدائرة الكبرى جـ ، هـ

اثبت أن : $\overline{ء ب}$ // $\overline{هـ جـ}$

(٣١) في الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان في ب ، جـ ، أ $\in$ إحدى الدائرتين

، ارسم $\overleftrightarrow{أ و}$ مماس لها عند أ ثم ارسم $\overrightarrow{أ ب}$

، $\overrightarrow{أ جـ}$ يقطعان الدائرة الأخرى في ء ، هـ

اثبت أن : $\overleftrightarrow{أ و}$ // $\overline{ء هـ}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

(٣٢) فى الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الخارج فى ا ، ب جـ مماس مشترك لهما ب، جـ

، رسم ا ء مماس مشترك لهم فى ا فقطع ب جـ فى ء

فإذا كان : ق(∠ ا ب جـ) = ٣٠°

أوجد : ❶ ق(∠ ب جـ ا) ❷ ق(∠ ب هـ ا)

(٣٣) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب

، ب ∈ ء جـ ، هـ جـ ، هـ ء مماسان

اثبت أن : ق(∠ هـ جـ ء) + ق(∠ هـ ء جـ) = ق(∠ جـ ا ء)

الشكل ا جـ هـ ء رباعي دائرى .

(٣٤) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب ، ا جـ قطعة مماسه للدائرة ن

ويقطع الدائرة م فى جـ ، ا ء قطعة مماسه للدائرة م

، و تقطع الدائرة ن فى ء ، جـ ب يقطع الدائرة ن فى هـ

اثبت أن : ا جـ // ء هـ

(٣٥) دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب ، رسم ا جـ مماسا للدائرة الأولى فقطع الدائرة الثانية فى جـ ، ورسم ب ء مماسا للدائرة الثانية ويقطع الدائرة الأولى فى ء اثبت أن : ا ء // جـ ب

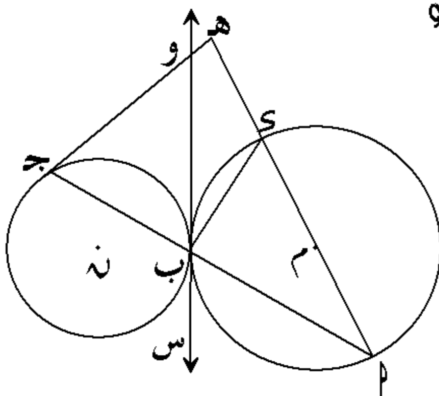
(٣٦) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ب ، جـ ∈ الدائرة ن ، جـ هـ مماسة للدائرة ن عند جـ ، ا ء قطر فى الدائرة م ، المماس المشترك للدائرتين عند ب يقطع جـ هـ فى و

اثبت أن : ❶ ق(∠ و ب جـ) = ق(∠ و جـ ب)

❷ الشكل ب ء هـ جـ رباعى دائرى

❸ ا هـ ⊥ هـ جـ



مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

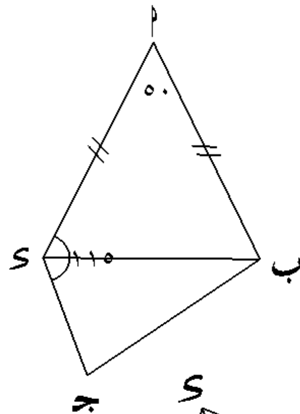
تمارين على عكس الزاوية المماسية

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ق(∠ أ) = ٥٠°

، ق(∠ أ ء جـ) = ١١٥°

، أ ب = أ ء اثبت أن ء جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

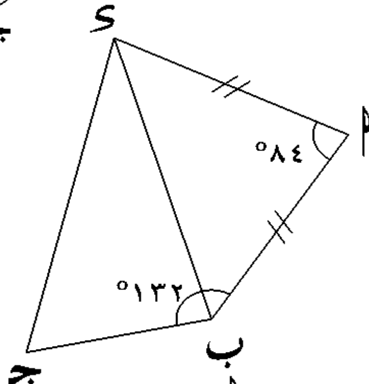


(٢) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء ،

ق(∠ أ) = ٨٤° ، ق(∠ أ ب جـ) = ١٣٢°

اثبت أن : ب جـ مماسه للدائرة المارة بالنقطة أ ، ب ، ء

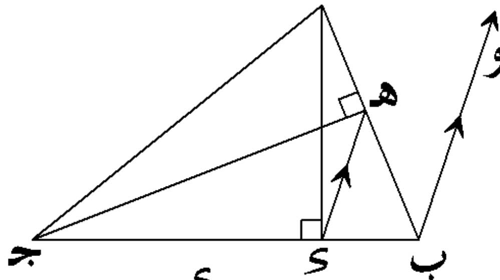


(٣) فى الشكل المقابل :

△ أ ب جـ ، رسم أ ء ⊥ ب جـ يقطعه فى ء

، رسم جـ هـ ⊥ أ ب يقطعه فى هـ ثم رسم ب و // ء هـ

اثبت أن : ب و مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ



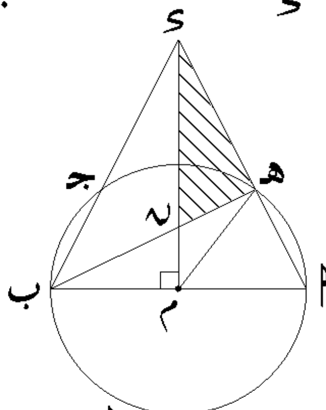
(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى دائرة مركزها م ، م جـ ⊥ أ ب ، ء ∈ م جـ

، أ ء ∩ الدائرة م = {هـ} ، ب هـ ∩ م جـ = {ن}

اثبت أن : الشكل ء هـ م ب رباعى دائرى .

هـ م مماس للدائرة المارة برؤوس △ ن ء هـ



(٥) فى الشكل المقابل :

أ هـ // ء ب ، ق(∠ ب أ هـ) = ٥٥° ، ق(∠ جـ) = ١١٠°

، أ ب = أ ء اثبت أن :

❶ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى .

❷ أ هـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

(٦) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب

، ق(∠ أ) = ٣٠° ، جـ ب = جـ هـ

اثبت أن : ❶ $\overline{ب هـ}$ // $\overline{أ جـ}$ ❷ ق(∠ جـ ء هـ)

❸ $\overline{جـ هـ}$ مماسه للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

(٧) فى الشكل المقابل :

$\overline{ء أ}$ ، $\overline{ء ب}$ قطعتان مماستان للدائرة م ،عند أ ، ب ، جـ ∈ الدائرة م

بحيث أ ب = أ جـ اثبت أن : $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فيه

: أ ب = أ ء ، ق(∠ جـ) = ١٤٠° ، ق(∠ أ ء هـ) = ٧٠°

اثبت أن : $\overleftarrow{ء هـ}$ مماس للدائرة عند ء

(٩) 📖 أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها ، $\overleftarrow{هـ أ}$ ، $\overleftarrow{هـ ب}$ مماسان

للدائرة عند أ ، ب فإذا كان : ق(∠ أ هـ ب) = ٧٠° ، ق(∠ أ ء جـ) = ١٢٥°

اثبت أن : ❶ أ ب = أ جـ ❷ $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماسا للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ

(١٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة ن ، $\overline{ن جـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، ء ∈ $\overline{ن جـ}$

، رسم $\overleftarrow{أ ء}$ فقطع الدائرة فى هـ

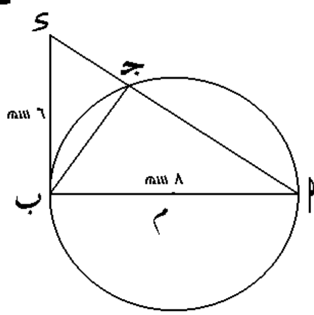
اثبت أن $\overleftarrow{أ جـ}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث جـ ء هـ

(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، $\overleftrightarrow{هـ ل}$ مماس للدائرة عند أ

اثبت أن : ق(∠ ل أ ب) = ق(∠ أ ب جـ)

$\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماس للدارة المارة برؤوس Δ أ ء هـ



(١٢) فى الشكل المقابل :

ا ب قطر فى الدائرة م ، ا ب = ٨سم ، ا جـ وتر فيها

رسم ب ء مماس للدائرة يقطع ا جـ فى ء فإذا كان : ب ء = ٦سم

❶ اثبت أن : ا ب مماس للدائرة المارة برؤوس △ جـ ب ء

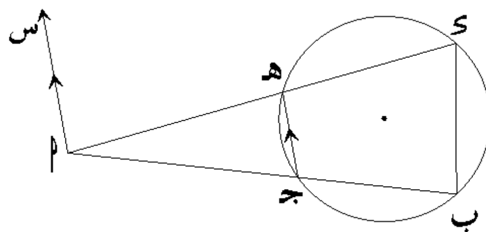
❷ أوجد : طول ب جـ

(١٣) ا ب قطر فى الدائرة م ، ا جـ وتر فيها ، هـ منتصف ا جـ ، رسم ب ء مماسا للدائرة عند ب ويقطع ا جـ فى ء ، رسم هـ م يقطع الدائرة فى س

اثبت أن ❶ الشكل م هـ ء ب رباعى دائرى ❷ ا ب مماس للدائرة المارة برؤوس △ ب جـ ء

ق(∠ ب ا س) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ء)

(١٤) فى الشكل المقابل :



الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى ، ء هـ ∩ ب جـ = {ا}

، ا س // جـ هـ

اثبت أن : ا س مماس للدائرة المارة برؤوس △ ا ب ء

(١٥) ا ب ، ا جـ وتران فى دائرة يحصران زاوية حادة حيث ء منتصف ب جـ ، رسم ب س مماس للدائرة عند ب قطع ا ء فى س ، ب ء ∩ ا جـ = {ص}

اثبت أن : ❶ الشكل ا ب س ص رباعى دائرى ❷ س ص مماسا للدائرة الخارجة △ ا ء ص

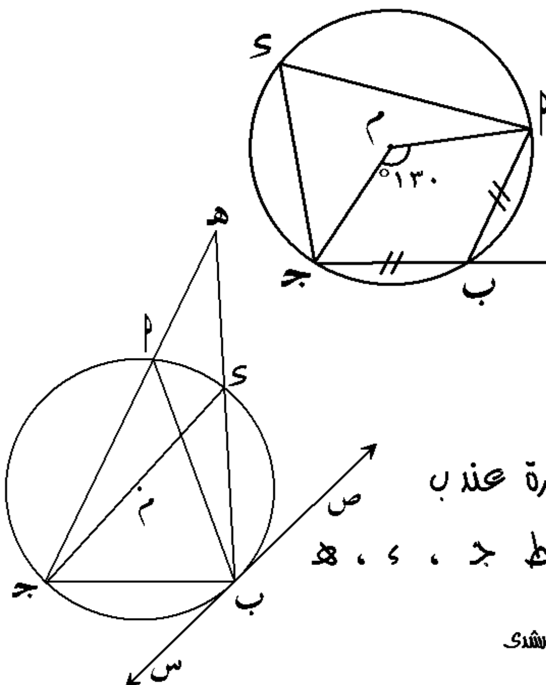
(١٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ ا م جـ) = ١٣٠°

، أوجد : ق(∠ ء) ، ق(∠ ا ب هـ)

اثبت أن : جـ هـ يمس الدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، م

(١٧) فى الشكل المقابل :



الدائر م خارجة عن △ ا ب جـ الذى فيه :

ا ب = ب جـ ، ب ء يقطع الدائرة فى ء ، س ص مماس للدائرة عند ب

اثبت أن : ❶ ب س // جـ هـ ❷ ب جـ مماس للدائرة المارة بالنقط جـ ، ء ، هـ

(١٨) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ب ، و ، م (مركز إحداهما) يقع على الدائرة ن

، $\overline{\text{م} \, \text{أ}}$ قطعة مماسة للدائرة ن

اثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{م} \, \text{ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، م ، جـ

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ نقطة خارج دائرة م ، $\overrightarrow{\text{أ} \, \text{ء}}$ يقطع الدائرة فى ء ، ب

، $\overrightarrow{\text{أ} \, \text{هـ}}$ يقطع الدائرة فى هـ ، جـ ، ثم رسم $\overline{\text{ء} \, \text{جـ}}$ ، $\overline{\text{ء} \, \text{هـ}}$

فإذا كان : ب هـ = ب جـ

اثبت أن : $\overline{\text{ب} \, \text{هـ}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس $\triangle$ أ ء هـ

(٢٠) $\triangle$ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ ، نقطة ء $\in$ $\overline{\text{ب} \, \text{جـ}}$ حيث أ جـ = أ ء رسم $\overleftarrow{\text{ء} \, \text{هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب} \, \text{جـ}}$ قطع أ ب فى هـ $\overline{\text{أ} \, \text{ء}}$ قطعة مماسية للدائرة المارة بالنقط ب ، ء ، هـ

(٢١) أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه فى هـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س} \, \text{ص}}$ مماسا للدائرة عند جـ حيث $\overleftrightarrow{\text{س} \, \text{ص}}$ // $\overline{\text{ب} \, \text{ء}}$

❶ اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ} \, \text{جـ}}$ ينصف ب أ ء ❷ $\overleftrightarrow{\text{ب} \, \text{جـ}}$ يمس الدائرة المارة برؤوس $\triangle$ أ ب هـ

(٢٢) أ ب جـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أ} \, \text{ء}}$ مماس للدائرة عند أ ، س $\in$ $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$ ، ص $\in$ $\overline{\text{أ} \, \text{جـ}}$ حيث $\overline{\text{س} \, \text{ص}}$ // $\overline{\text{ب} \, \text{جـ}}$ ، اثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ} \, \text{ء}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس $\triangle$ أ س ص

(٢٣) $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$ قطر فى الدائرة م، جـ $\in$ الدائرة م ، رسم $\overleftarrow{\text{جـ} \, \text{س}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$ حيث $\overleftarrow{\text{جـ} \, \text{س}}$ $\cap$ $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$ = { س }

اثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ} \, \text{جـ}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس $\triangle$ ب س جـ

(٢٤) $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$ قطر فى دائرة م ، س $\in$ $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$. رسم $\overleftarrow{\text{س} \, \text{جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ} \, \text{ب}}$ قطع الدائرة فى جـ ثم أخذت ء $\in$ $\overline{\text{س} \, \text{جـ}}$ ورسم $\overrightarrow{\text{أ} \, \text{ء}}$ قطع الدائرة فى هـ **اثبت أن** : $\overline{\text{أ} \, \text{جـ}}$ قطعة مماسية للدائرة المارة بالنقط جـ ، ء ، هـ